Espaces Fonctionnels — Corrigé du Partiel

Exercice 1. *Soit E, F des espaces de Banach et $S \in L'(E,F)$ une application linéaire continue.*

1. *On suppose qu'il existe $T \in L'(F,E)$ telle que $T \circ S = \mathrm{Id}$.*

   (a) *Montrer qu'il existe une constante $M > 0$ telle que $\|S(x)\| \geq M\|x\|$.*
   Pour tout $x \in E$ on a $\|x\| = \|T(S(x))\| \leq \|T\|\|S(x)\|$. Comme $T \circ S \neq 0$ on a $\|T\| \neq 0$ et $M = 1/\|T\|$ convient.

   (b) *Montrer que S est injective et que $\mathrm{Im}\, S$ est fermée.*
   Si $S(x) = 0$ alors $M\|x\| \leq \|S(x)\| = 0$, et comme $M > 0$ on en déduit $\|x\| = 0$ donc $x = 0$.
   Si $y_n = S(x_n)$ est une suite de Cauchy dans $\mathrm{Im}\, S$ la suite $(x_n)_n$ est également de Cauchy car $\|x_p - x_q\| \leq \|S(x_p - x_q)\|/M = \|y_p - y_q\|/M$. Comme E est complet, x_n converge vers un vecteur $x \in E$, et par continuité de S la suite $(y_n)_n$ converge vers $S(x) \in \mathrm{Im}\, S$. Cela montre que $\mathrm{Im}\, S$ est complète, donc fermée.
   Ou plus simplement : Si $y_n = S(x_n)$ est une suite dans $\mathrm{Im}\, S$ qui converge vers $y \in F$, alors $x_n = T(S(x_n)) = T(y_n)$ converge vers $T(y)$ par continuité de T, et par continuité de S on en déduit que $y_n = S(x_n)$ converge vers $S(T(y))$, donc $y = S(T(y)) \in \mathrm{Im}\, S$.

   (c) *Montrer que $\mathrm{Ker}\, T$ est un supplémentaire fermé de $\mathrm{Im}\, S$.*
   Si $y \in \mathrm{Ker}\, T \cap \mathrm{Im}\, S$ on peut écrire $y = S(x)$ et on a $0 = T(y) = T(S(x)) = x$, puis $y = S(x) = S(0) = 0$. Par ailleurs pour $z \in F$ quelconque on a $T(z - S(T(z))) = T(z) - T(z) = 0$, donc $z - S(T(z)) \in \mathrm{Ker}\, T$ et cela montre que $z \in \mathrm{Ker}\, T + \mathrm{Im}\, S$. On a ainsi montré que $\mathrm{Ker}\, T$ et $\mathrm{Im}\, S$ sont supplémentaires. Enfin $\mathrm{Ker}\, T$ est fermé car c'est le noyau d'une application linéaire continue.

2. *On suppose maintenant que S est injective, que $\mathrm{Im}\, S$ est fermée, et que $\mathrm{Im}\, S$ admet un supplémentaire fermé $F_0 \subset F$. On considère $G = \{(S(x) + z, x) \mid x \in E,\ z \in F_0\} \subset F \times E$.*

   (a) *Montrer que G est le graphe d'une application $T : F \to E$.*
   On admet que, comme G est un sous-espace, T est linéaire.
   Il s'agit de montrer que la projection $p_1 : G \to F$ sur la première composante est bijective (alors $T = p_2 \circ p_1^{-1}$). Si $p_1(S(x)+z, x) = 0$, on a par définition $S(x)+z = 0$. Comme F_0 est en somme directe avec $\mathrm{Im}\, S$ cela implique $S(x) = 0$ et $z = 0$. Comme S est injective on en déduit $x = 0$. Finalement on a $(S(x) + z, x) = (0, 0)$, donc p_1 est injective. Pour la surjectivité on fixe $y \in F$. Comme $\mathrm{Im}\, S$ et F_0 engendrent F on peut écrire $y = S(x) + z$ et alors $y = p_1(S(x) + z, x)$.

   (b) *Montrer que T est continue.*
   Comme E et F sont des espaces de Banach et T est linéaire, d'après le théorème du graphe fermé il suffit de montrer que G est fermé. Soit $(S(x_n) + z_n, x_n)$ une suite de points de G qui converge vers $(y, x) \in F \times E$. En particulier $\lim x_n = x$, donc par continuité de S on a $\lim S(x_n) = S(x)$. Comme d'autre part $\lim S(x_n)+z_n = y$, on en déduit que $\lim z_n = y - S(x)$. Comme F_0 est fermé, cela montre que $z = y - S(x)$ appartient à F_0. On a donc $(y, x) = (S(x) + z, x)$ avec $z \in F_0$, donc $(y, x) \in G$ et G est fermé.

   (c) *Montrer que $T \circ S = \mathrm{Id}$.*
   En prenant $z = 0$ on voit que $(S(x), x) \in G$ pour tout $x \in E$. Par définition du graphe, cela montre que $T(S(x)) = x$.

3. *On considère le cas $E = F = \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, et on suppose que $S \in L'(E)$ est une* isométrie*, c'est-à-dire qu'on a $\|S(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in E$. Montrer qu'il existe $T \in L'(E)$ tel que $T \circ S = \mathrm{Id}$.*
   S est injective car $S(x) = 0 \Rightarrow \|x\| = \|S(x)\| = 0 \Rightarrow x = 0$. $\mathrm{Im}\, S$ est fermée par la même preuve (via la complétude) qu'au 1(b). Enfin, comme on est dans un espace de Hilbert, $\mathrm{Im}\, S$ admet un supplémentaire fermé, par exemple son orthogonal. Donc d'après 2 il existe $T \in L'(E)$ tel que $T \circ S = \mathrm{Id}$.

Exercice 2.
On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = C([0,1], \mathbb{R})$ des fonctions continues sur $[0,1]$, muni de la norme de la convergence uniforme $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$. On rappelle qu'une suite de fonctions $f_n \in E$ converge simplement *vers $f \in E$ si $\lim_{n\infty} f_n(t) = f(t)$ pour tout $t \in [0,1]$.*

1. *Exemple. On considère les fonctions $f_n \in E$ données par la formule $f_n(t) = n^2 t^n (1 - t)$.*
   Montrer que la suite de fonctions f_n converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,1]$.
   Pour $t \in [0,1[$ on a $\lim n^2 t^n = 0$ par croissances comparées. Pour $t = 1$ on a $t - 1 = 0$ donc $f_n(t) = 0$ pour tout n. Finalement on a bien $\lim f_n(t) = 0$ pour tout $t \in [0,1]$.
   A-t-on $\lim_{n\infty} \int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t = 0$?
   On calcule facilement $\int_0^1 f_n = n^2/(n+1)(n+2)$ donc $\lim \int_0^1 f_n = 1 \neq 0$.
   La suite $(f_n)_n$ converge-t-elle vers 0 dans E ?
   La converge dans E est la convergence uniforme, et comme on est sur un intervalle borné la convergence uniforme permet d'intervertir limite et intégrale. Mais ici $0 = \int_0^1 (\lim f_n(t))\mathrm{d}t \neq \lim \int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t = 1$. Donc la convergence n'est pas uniforme.

2. *Montrer que les formes linéaires suivantes sont continues sur E :*

$$\varphi_0 : f \mapsto f(0), \quad \psi : f \mapsto \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t.$$

On a $|\varphi(f)| = |f(0)| \leq \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| = \|f\|$ donc φ est continue. De même par l'inégalité triangulaire $|\psi(f)| = |\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t| \leq \int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t \leq \int_0^1 \|f\|\mathrm{d}t = \|f\|$ donc ψ est continue.

3. *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions dans E qui converge* faiblement *vers $f \in E$.*
Montrer que $(f_n)_n$ converge simplement vers f.
On considère, pour tout $t \in [0,1]$, la forme linéaire $\varphi_t : E \to \mathbb{R}$, $f \mapsto f(t)$ qui est continue comme en 2. Par convergence faible on a alors $\lim \varphi_t(f_n) = \varphi_t(f)$ ce qui s'écrit $\lim f_n(t) = f(t)$. Ainsi $(f_n)_n$ converge simplement vers f.

4. *Réciproquement, la converge simple d'une suite de fonctions $f_n \in E$ implique-t-elle sa convergence faible ? Justifier la réponse.*
On considère la suite $(f_n)_n$ de la question 1, qui converge simplement vers 0. Si elle convergeait faiblement vers 0 on aurait en particulier $\lim \psi(f_n) = \psi(0) = 0$. Mais on a vu que $\lim \psi(f_n) = \lim \int_0^1 f_n = 1$. Ainsi la convergence simple n'implique pas la convergence faible.

On rappelle le théorème de représentation de Riesz-Markov : pour toute forme linéaire continue $\varphi : E \to \mathbb{R}$ il existe deux mesures boréliennes finies *μ_+, μ_- sur $[0,1]$ telle que $\varphi(f) = \int f\mathrm{d}\mu_+ - \int f\mathrm{d}\mu_-$ pour toute $f \in E$.*
Ici, « finies » signifie que $\mu_-([0,1])$, $\mu_+([0,1]) < +\infty$, de manière équivalente les fonctions constantes sur $[0,1]$ sont intégrables par rapport à μ_- et μ_+.

5. *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions dans E qui est* bornée *et converge simplement vers $f \in E$.*
Monter que $(f_n)_n$ converge faiblement vers f.
On sait que la convergence faible équivaut à la convergence de $\varphi(f_n)$ vers $\varphi(f)$, pour tout forme linéaire continue $\varphi \in E'$. En appliquant le théorème de Riesz-Markov on peut écrire $\varphi(f_n) = \int f_n\mathrm{d}\mu_+ - \int f_n\mathrm{d}\mu_-$. On applique alors le théorème de convergence dominée : par hypothèse f_n converge simplement vers f et il existe $M > 0$ tel que $|f_n(t)| \leq M$ pour tout t et tout n par hypothèse, de plus $\int M\mathrm{d}\mu_+ = M\mu_+([0,1]) < \infty$ et $\int M\mathrm{d}\mu_- = M\mu_-([0,1]) < \infty$. On peut alors intervertir limite et intégrale et on obtient $\lim \varphi(f_n) = \int f\mathrm{d}\mu_+ - \int f\mathrm{d}\mu_- = \varphi(f)$.

Exercice 3. *On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = C([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme.*

Pour $f \in E$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on définit $\varphi_n(f) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\tfrac{k}{n})$.

1. *Montrer que φ_n est une forme linéaire continue sur E telle que $\|\varphi_n\| \leq 2$.*
La linéarité de φ_n résulte de la linéarité de l'intégrale et de la somme. Par ailleurs, grâce à l'inégalité triangulaire on a $|\varphi_n(f)| \leq \int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n |f(\frac{k}{n})| \leq \int_0^1 \|f\|\mathrm{d}t + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \|f\| = 2\|f\|$.

2. *En utilisant des fonctions affines par morceaux, montrer que $\|\varphi_1\| = 2$.*
On utilise la fonction f_n constante égale à 1 sur $\left[0, 1-\frac{1}{n}\right]$ et affine sur $\left[1-\frac{1}{n}, 1\right]$, avec $f_n(1-\frac{1}{n}) = 1$ et $f_n(1) = -1$. En particulier $\int_{1-\frac{1}{n}}^1 f_n(t)\mathrm{d}t = 0$ et on a $\varphi_1(f_n) = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t - f(1) = (1-\frac{1}{n}) + 1$. Par ailleurs on a $\|f_n\| = 1$. Alors $\|\varphi_1\| \geq |\varphi_1(f_n)|/\|f_n\| = 2 - \frac{1}{n}$ pour tout n, donc en passant à la limite $\|\varphi_1\| \geq 2$.
On admet qu'on a plus généralement $\|\varphi_n\| = 2$ pour tout n.

3. *On fixe $f \in E$. Que vaut $\lim_{n\infty} \varphi_n(f)$?*
Comme f est continue, les sommes de Riemann $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(\frac{k}{n})$ convergent vers l'intégrale $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$. Autrement dit on a $\lim \varphi_n(f) = 0$.

4. *On suppose que f est K-lipschitzienne : pour tous x, $y \in [0,1]$ on a $|f(x) - f(y)| \leq K|x-y|$.*
   (a) *Montrer l'inégalité suivante :*
   $$\Big| \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(t)\mathrm{d}t - \tfrac{1}{n} f(\tfrac{k}{n}) \Big| \leq \frac{K}{2n^2}$$
   On a $|\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{n}f(\frac{k}{n})| = |\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} (f(t) - f(\frac{k}{n}))\mathrm{d}t| \leq \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} |f(t) - f(\frac{k}{n})|\mathrm{d}t$ par inégalité triangulaire. Comme f est K-lipschitzienne on peut majorer cette quantité par $\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} K|t - \frac{k}{n}| = K/2n^2$.
   (b) *En déduire que $\varphi_n(f) = O(\frac{1}{n})$.*
   On a $|\varphi_n(f)| = |\sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(\frac{k}{n})| \leq \sum_{k=1}^n |\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{n}f(\frac{k}{n})|$ par la relation de Chasles et l'inégalité triangulaire. D'après la question précédente on a alors $|\varphi_n(f)| \leq \sum_{k=1}^n K/2n^2 = K/2n$.

5. *Montrer qu'il existe une fonction $f \in E$ pour laquelle on n'a pas $\varphi_n(f) = O(\frac{1}{n})$.*
On pourra utiliser le théorème de Banach-Steinhaus.
Par l'absurde, supposons que pour toute $f \in E$ on a $\varphi_n(f) = O(\frac{1}{n})$. Autrement dit, $n\varphi_n(f)$ est bornée pour toute fonction f. Comme E est un espace de Banach, on peut alors appliquer le théorème de Banach-Steinhaus aux applications linéaires continues $n\varphi_n$. On obtient l'existence d'une constante $M > 0$ telle que $n\|\varphi_n\| \leq M$ pour tout n. Mais cela contredit l'égalité $\|\varphi_n\| = 2$ admise à la question 2.