Intégrales généralisées

Exercice 1. Étudier l'intégrabilité des fonctions suivantes sur les intervalles précisés ci-dessous :

- $a : x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{x}^2$ sur $[1, +\infty[$,
- $b : x \mapsto \frac{(\ln x)^2}{\sqrt{x}}$ sur $[1, +\infty[$,
- $c : x \mapsto \frac{1}{x \ln x}$ sur $[2, +\infty[$,
- $d : x \mapsto \sqrt{x} \ln(x)$ sur $]0, 1]$,
- $e : x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{x}$ sur $]0, 1]$,
- $f : x \mapsto \frac{1}{x^2 \ln x}$ sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$,
- $g : x \mapsto \ln(2x)$ sur $]0, 1]$,
- $h : x \mapsto \sqrt{-\ln x}$ sur $]0, 1]$,
- $i : x \mapsto \frac{1}{(x-1)\sqrt{x-1}}$ sur $]1, 2]$,
- $j : x \mapsto \exp(-3x)$ sur $[0, +\infty[$,
- $k : x \mapsto x^2 \exp(-x)$ sur $[0, +\infty[$,
- $l : x \mapsto \exp(-2 \ln x)$ sur $[1, +\infty[$,
- $m : x \mapsto x(\sin x)e^{-x}$ sur $[0, +\infty[$,
- $n : x \mapsto \exp(-\sqrt{\ln x})$ sur $[1, +\infty[$,
- $o : x \mapsto x \exp(-\sqrt{x})$ sur $[0, +\infty[$,
- $p : x \mapsto \exp(-x \arctan x)$ sur $[0, +\infty[$,
- $q : x \mapsto \frac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}$ sur $[2, +\infty[$.

Exercice 2. Étudier l'intégrabilité des fonctions suivantes sur les intervalles précisés ci-dessous :

- $a : x \mapsto \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x^3-1}}$ sur $[1, +\infty[$,
- $b : x \mapsto \frac{\ln x}{\sqrt{x^3+x^2+1}}$ sur $[1, +\infty[$,
- $c : x \mapsto \arctan e^{-x}$ sur $[0, +\infty[$,
- $d : x \mapsto \frac{\arctan x}{x \ln(1+x^2)}$ sur $[1, +\infty[$,
- $e : x \mapsto (\operatorname{ch} \sqrt{\ln x})^{-2}$ sur $[2, +\infty[$,
- $f : x \mapsto \sqrt{\ln(x+1)} - \sqrt{\ln x}$ sur $[1, +\infty[$,
- $g : x \mapsto \arccos(\frac{x-1}{x})$ sur $[1, +\infty[$,
- $h : x \mapsto x + 1 - \sqrt{x^2 + 2x}$ sur $[1, +\infty[$,
- $i : x \mapsto \frac{\cos x}{\sqrt{x+x^2}}$ sur $]0, 1]$,
- $j : x \mapsto \frac{1}{e^x - \cos x}$ sur $]0, 1]$,
- $k : x \mapsto \frac{\operatorname{ch} x - \cos x}{x^{5/2}}$ sur $]0, 1]$,
- $l : x \mapsto \frac{1}{1-\sqrt{x}}$ sur $[0, 1[$,
- $m : x \mapsto 1 + x \ln(\frac{x}{x+1})$ sur $]0, +\infty[$.

Exercice 3. Discuter, suivant la valeur du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergence des intégrales suivantes :

— $I = \int_0^{+\infty} x^\alpha \arctan(x) \mathrm{d}x$,
— $J = \int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^\alpha} \mathrm{d}x$,
— $K = \int_0^{+\infty} x^\alpha \ln(x + e^{\alpha x}) \mathrm{d}x$.

Exercice 4. Calculer les intégrales suivantes, après avoir justifié leur convergence :

— $I = \int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x}} \mathrm{d}x$.
— $J = \int_0^{+\infty} x e^{-\sqrt{x}} \mathrm{d}x$.
— $K = \int_0^1 \frac{x \ln x}{(x^2+1)^2}$.

Exercice 5. On pose $I_n = \int_0^1 (\ln x)^n \mathrm{d}x$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a. Justifier l'existence de I_n pour tout n.
b. Déterminer une relation de récurrence entre les intégrales I_n.
c. Calculer I_n pour tout n.

Exercice 6. Pour tout $a > 0$ on pose $I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{a^2+x^2}$.

a. Justifier l'existence de $I(a)$ pour tout $a > 0$.

b. En effectuant le changement de variable $x = 1/y$, montrer que $I(1) = 0$.

c. En effectuant le changement de variable $x = ay$, déterminer la valeur de $I(a)$ pour tout $a > 0$.

Exercice 7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on considère les intégrales

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^n)} \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{+\infty} \frac{x^n\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^n)}.$$

a. Justifier l'existence de I_n et J_n pour tout n.

b. Montrer que $I_n + J_n = \frac{\pi}{2}$ pour tout n.

c. À l'aide du changement de variable $x = 1/y$, déterminer les valeurs de I_n et J_n pour tout n.

Exercice 8. On cherche à calculer l'*intégrale de Gauss* $G = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x$.

a. On rappelle qu'on a $e^t \geq 1 + t$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\forall u \in [0, n] \quad \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n \leq e^{-u} \quad \text{et} \quad \forall u \geq 0 \quad e^{-u} \leq \left(1 + \frac{u}{n}\right)^{-n}.$$

b. Démontrer qu'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \mathrm{d}x \leq G \leq \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}x.$$

On appelle I_n, J_n les intégrales aux membres de gauche et de droite.

c. Grâce à des changements de variables appropriés, relier I_n et J_n aux intégrales de Wallis $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^n\mathrm{d}x$.

d. On rappelle que $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$. Montrer que $G = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 9.

a. Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\mathrm{d}x$ converge.

b. Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ converge. Indication : utiliser une intégration par parties.

c. Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{(\sin x)^2}{x}\mathrm{d}x$ diverge. Indication : linéariser $(\sin x)^2$.

d. Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ n'est pas absolument convergente.
Indication : utiliser la question précédente.

Exercice 10. On pose $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ et $g(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}+\sin x}$.

a. Étudier la convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ et sa convergence absolue.
On pourra s'inspirer de l'exercice **??**.

b. Montrer que $f \sim_{+\infty} g$. Plus précisément, montrer qu'il existe une fonction $h(x) = O(x^{-3/2})$ telle que

$$g(x) = f(x) - \frac{(\sin x)^2}{x} + h(x).$$

c. Étudier la convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ et sa convergence absolue.

Exercice 11.

a. Pour quelles valeurs de $\alpha > 0$ l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}$ est-elle convergente ? absolument convergente ?

b. Pour quelles valeurs de $\alpha > 0$ l'intégrale $\int_1^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{\sin x}{x^\alpha}\right)$ est-elle convergente ? absolument convergente ?