

## SUITES DE FONCTIONS

**Exercice 1.** Déterminer la limite simple de la suite des fonctions suivantes :

$$f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1 + x^{2n+1}}{1 + x^{2n}}.$$

**Exercice 2.** Déterminer la limite simple de la suite des fonctions suivantes :

$$f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{2x + n^2 x^3}{1 + n^2 x^2}.$$

La limite est-elle uniforme ?

**Exercice 3.** On considère les fonctions

$$f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{nx}{1 + n^2 x^2}.$$

- Déterminer la limite simple  $g$  de la suite de fonctions  $(f_n)_n$ .
- Calculer  $f_n(\frac{1}{n})$ . La suite de fonctions  $(f_n)_n$  converge-t-elle uniformément vers  $g$  sur  $\mathbb{R}_+$  ?
- Montrer que pour tout  $n$  et tout  $x > 0$  on a  $|f_n(x)| \leq 1/nx$ .
- On fixe un réel  $a > 0$ . Montrer que la suite  $(f_n)_n$  converge uniformément vers  $g$  sur  $[a, +\infty[$ .

**Exercice 4.** On considère les fonctions

$$f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{n(x^3 + x)e^{-x}}{nx + 1}.$$

- Déterminer la limite simple  $g$  de la suite  $(f_n)_n$ .
- La convergence est-elle uniforme ?
- Montrer que  $f_n(x) - g(x) = g(x)/(nx + 1)$ .
- On fixe  $A > 0$ . Montrer que  $(f_n)_n$  converge uniformément vers  $g$  sur l'intervalle  $[A, +\infty[$ .

**Exercice 5.** On considère les fonctions

$$f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{1 + (x + n)^2}.$$

- Déterminer la limite simple  $g$  de la suite de fonctions  $(f_n)_n$ .
- Représenter les graphes de  $f_0, f_1, f_2$ . La convergence de la question précédente est-elle uniforme ?
- Soit  $A$  un réel fixé. Montrer que la suite de fonction  $(f_n)_n$  converge uniformément vers  $g$  sur l'intervalle  $[A, +\infty[$ .

**Exercice 6.** Soit  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction continue, non identiquement nulle, telle que  $f(0) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ . Pour tout  $x \geq 0$  et tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on pose  $f_n(x) = f(nx)$  et  $g_n(x) = f(x/n)$ .

- Montrer que les suites de fonctions  $(f_n)_n$  et  $(g_n)_n$  convergent simplement vers la fonction nulle.
- Les convergences de la question précédente sont-elles uniformes ?  
Montrer qu'on a convergence uniforme sur tout intervalle de la forme  $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$ .
- On suppose que  $I = \int_0^{+\infty} f(x)dx$  converge. Déterminer  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)dx$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} g_n(x)dx$ .

**Exercice 7.** On considère la suite de fonctions  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f_0(x) = 0$  et  $f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{1}{2}(x - f_n(x))^2$ .

- Montrer qu'on a  $0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \leq \sqrt{x}$  pour tout  $x \in [0, 1]$ .
- Déterminer la limite simple  $r$  de la suite de fonctions  $(f_n)_n$ .
- (i) Soit  $\epsilon \in ]0, 1]$  fixé. Montrer que pour tout  $x \in [0, \epsilon^2]$  et pour tout  $n$  on a  $|f_n(x) - \sqrt{x}| \leq \epsilon$ .  
(ii) Montrer que pour tout  $x \in [\epsilon^2, 1]$  on a  $\sqrt{x} - f_{n+1}(x) \leq (1 - \epsilon)(\sqrt{x} - f_n(x))$ .  
(iii) Montrer qu'il existe  $N \in \mathbb{N}^*$  tel que  $(1 - \epsilon)^n \leq \epsilon$  pour tout  $n \geq N$ .  
(iv) Montrer que la suite de fonctions  $(f_n)_n$  converge uniformément vers  $r$ .
- Montrer que la fonction « racine carrée » est limite uniforme sur  $[0, 1]$  d'une suite de polynômes. Montrer qu'il existe une suite de polynômes qui converge uniformément vers la fonction « valeur absolue » sur  $[-1, 1]$ .

**Exercice 8.** Pour tout  $x > 1$  on pose

$$\zeta(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x}, \quad f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x} \quad \text{et} \quad d_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^x} - \int_1^{n+1} \frac{dt}{t^x}.$$

- Justifier le fait que  $\zeta(x)$  et  $f(x)$  sont bien définies pour  $x > 1$ . Calculer  $f(x)$ .  
Montrer que la suite de fonction  $(d_n)_n$  converge simplement sur  $]1, +\infty[$  vers une fonction  $d$  à déterminer.
- Montrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  et tout  $x > 1$  on a

$$0 \leq \frac{1}{k^x} - \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^x} \leq \frac{1}{k^x} - \frac{1}{(k+1)^x}.$$

En déduire un encadrement de  $d(x) - d_n(x)$ .

- Montrer que la suite de fonctions  $(d_n)_n$  converge uniformément vers  $d$ .
- Soit  $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$  les sommes partielles de la série harmonique.  
On rappelle qu'il existe une constante  $\gamma \in \mathbb{R}$  telle que  $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$ .  
Montrer qu'on a  $\zeta(x) = \frac{1}{x-1} + \gamma + o(1)$  lorsque  $x \rightarrow 1$ .

**Exercice 9.** On considère les fonctions  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto n^\alpha x(1-x)^n$ , où  $\alpha \in \mathbb{R}_+$  est un paramètre fixé.

On pose  $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$ .

- Déterminer la limite simple  $g$  de la suite de fonctions  $(f_n)_n$ .
- Dresser le tableau de variations de  $f_n$  sur  $[0, 1]$ .
- Pour quelles valeurs de  $\alpha$  la suite  $(f_n)_n$  converge-t-elle uniformément vers  $g$  ?
- Montrer que  $\lim I_n = 0$  lorsque  $\alpha < 1$ .
- Calculer  $I_n$  pour tout  $n$ . Pour quelles valeurs de  $\alpha$  a-t-on  $\lim I_n = 0$  ?

**Exercice 10.** On considère les fonctions  $f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \frac{1}{n!} x^n e^{-x}$ .

- Déterminer la limite simple  $g$  de la suite de fonctions  $(f_n)_n$ .
- Étudier la fonction  $f_n$  sur  $\mathbb{R}_+$ .
- Montrer que la suite de fonctions  $(f_n)_n$  converge uniformément vers  $g$ .
- A-t-on  $\lim_{n \infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) dx = \int_0^{+\infty} g(x) dx$  ?  
Calculer  $\lim_{n \infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) dx$  pour tout  $n$ . On pourra procéder par récurrence.