Espaces Fonctionnels
Partiel du 1er mars 2017
Corrigé

Exercice 1.

1. Comme les f_k sont à valeurs positives, la suite de fonctions $(S_n)_n$ est croissante. De plus S_n est continue pour tout n car c'est une somme finie de fonctions continues. Par hypothèse, $(S_n)_n$ converge simplement vers S et S est continue. Enfin $[0,1]$ est compact. Donc, d'après le théorème de Dini, il y a convergence uniforme.
2. Les f_k sont bien continues et positives car sur $[0,1]$ on a $t^{k+1} \leq t^k$. Il reste à vérifier la convergence simple de la série et à calculer la somme. Pour $t = 1$ on a $f_k(t) = 0$ pour tout k, donc la série converge et $S(1) = 0$. Pour $t \in [0,1[$ on reconnait le DSE de $-\ln(1-t)$: $S(t) = (1-t)\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} t^k = (t-1)\ln(1-t)$. En particulier S est continue sur $[0,1[$, et également en 1 par croissances comparées : $\lim_{t\to 1}(t-1)\ln(1-t) = 0 = S(1)$. On peut donc appliquer la question précédente pour obtenir la convergence uniforme. *En fait il y a même convergence normale.*
3. À nouveau les fonctions f_k sont positives, et continues (par croissances comparées en 0). On a $f_k(1) = 0$ pour tout k donc $S(1) = 0$. Pour $t \in [0,1[$ on a une simple somme géométrique qui converge : $S(t) = -\ln(t)\sum_{k=1}^{\infty} t^k = t\ln(t)/(t-1)$. Comme $\ln(t) \sim_1 t-1$, on a $\lim_{t\to 1} S(t) = 1 \neq S(1)$. La limite simple S n'est pas continue en 1, donc le théorème de Dini ne s'applique pas. De plus, comme les f_k sont continues les sommes partielles S_n le sont aussi et on ne peut pas avoir convergence uniforme, sinon la limite S serait également continue.

Exercice 2.

1. Soit $x \in \lambda B \cap E_\lambda(T)$. Cela signifie que $\|x\| \leq \lambda$ et $T(x) = \lambda x$. On a alors $x = T(y)$ avec $y = x/\lambda$, et $\|y\| = \|x\|/|\lambda| \leq 1$. Donc $x \in T(B)$ et on a démontré l'inclusion demandée.
2. Le sous-espace propre $E_\lambda(T)$ est le noyau de $T - \lambda\mathrm{Id}$ qui est continue car c'est le cas de T, donc $E_\lambda(T)$ est un fermé. C'est également le cas de la boule fermée λB, donc de l'intersection $\lambda B \cap E_\lambda(T)$. D'après la question précédente, ce fermé est inclus dans $T(B)$, donc dans son adhérence qui est compacte. Cela implique que $\lambda B \cap E_\lambda(T)$ est compact. Enfin, comme $E_\lambda(T)$ est un sous-espace on a $\lambda^{-1}E_\lambda(T) = E_\lambda(T)$, donc $\lambda^{-1}(\lambda B \cap E_\lambda(T)) = B \cap E_\lambda(T)$. Comme l'application de dilatation est continue, on en déduit que $B \cap E_\lambda(T)$ est compact.
3. L'ensemble $B \cap E_\lambda(T) = \{x \in E_\lambda(T) \mid \|x\| \leq 1\}$ est la boule unité fermée de $E_\lambda(T)$. Elle est compacte, donc d'après le théorème de Riesz $E_\lambda(T)$ est de dimension finie.

Exercice 3.

1. Le théorème qui permet d'affirmer que K est bornée est le « théorème des bornes » : toute fonction réelle continue sur un compact est bornée (et atteint ses bornes). On peut aussi invoquer le fait que l'image continue d'un compact est un compact, et que les compacts sont bornés. Le théorème qui permet d'affirmer que K est uniformément continue est le théorème de Heine : toute application continue sur un compact est uniformément continue.
2. Pour toute $f \in C([0,1],\mathbb{R})$ et $s \in [0,1]$ on a, grâce à l'inégalité triangulaire et la positivité de l'intégrale :
$$|T(f)(s)| \leq \int_0^1 |K(s,t)||f(t)|\mathrm{d}t \leq \int_0^1 \|K\|_\infty \|f\|_\infty \mathrm{d}t = \|K\|_\infty \|f\|_\infty.$$
En prenant le sup sur s on obtient $\|T(f)\|_\infty \leq \|K\|_\infty \|f\|_\infty$. Cela montre que T est une application linéaire bornée, donc continue, et que $\|T\| \leq \|K\|_\infty$.

3. On applique la continuité uniforme de K : il existe $\alpha > 0$ tel que pour tous (s,t), $(s',t') \in [0,1]^2$ tels que $d((s,t),(s',t') \le \alpha$ on ait $|K(s,t) - K(s',t')| \le \epsilon$. En particulier pour s, $s' \in [0,1]$ tels que $|s - s'| \le \alpha$ on a $d((s,t),(s',t)) = |s - s'| \le \alpha$ pour tout $t \in [0,1]$, donc

$$|T(f)(s) - T(f)(s')| = \left| \int_0^1 (K(s,t) - K(s',t)) f(t) \mathrm{d}t \right| \\ \le \int_0^1 |K(s,t) - K(s',t)||f(t)| \mathrm{d}t \le \int_0^1 \epsilon \|f\|_\infty \mathrm{d}t = \epsilon \|f\|_\infty.$$

4. Fixons $s \in [0,1]$ et montrons que $T(B)$ est équicontinue en s. Pour cela on fixe $\epsilon > 0$ et on prend le réel $\alpha > 0$ fourni par la question précédente. Tout élément de $T(B)$ s'écrit $T(f)$ avec $\|f\|_\infty \le 1$. Pour tout élément de cette forme, et tout réel $s' \in [0,1]$ tel que $|s - s'| < \alpha$, on a $|T(f)(s) - T(f)(s')| \le \epsilon$ d'après la question précédente. Cela montre l'équicontinuité en s.

   Par ailleurs $T(B) \subset C([0,1], \mathbb{R})$ et $[0,1]$ est compact. Pour appliquer le théorème d'Ascoli il reste à vérifier que $\{T(f)(s) \mid f \in B\}$ est d'adhérence compacte dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire borné, pour tout $s \in [0,1]$. Cela résulte de la majoration de la deuxième question : pour $f \in B$ on a $|T(f)(s)| \le \|K\|_\infty \|f\|_\infty \le \|K\|_\infty$.

Grâce à l'exercice 2 on peut conclure en particulier que les sous-espaces propres de l'opérateur à noyau continu K, agissant sur $C([0,1], \mathbb{R})$, sont de dimension finie, sauf peut-être pour la valeur propre nulle.

Exercice 4.

1. La forme linéaire $\varphi_i : E \to \mathbb{R}, y = (y_j)_j \mapsto y_i$ est continue car $|\varphi_i(y)| = |y_i| \le \sum_{j=0}^\infty |y_j| = \|y\|_1$. Comme $(x_k)_k$ converge faiblement vers 0, on doit avoir $\lim_{k\infty} x_{k,i} = \lim_{k\infty} \varphi_i(x_k) = \varphi_i(0) = 0$.
2. Pour tout i on a $\lim_{k\infty} x_{k,i} = 0$, donc il existe un rang K_i tel que $|x_{k,i}| \le \epsilon/5(A+1)$ pour tout $k \ge K_i$. On fixe alors $k \ge \max(K, K_0, \ldots, K_A)$ et on a $\sum_{i=0}^A |x_{k,i}| \le \sum_{i=0}^A \epsilon/5(A+1) = \epsilon/5$. Pour cet indice k on a $x_k \in E$, autrement dit la série $(\sum_{i\in\mathbb{N}} |x_{k,i}|)$ converge. Ses restes tendent donc vers 0 et il existe ainsi un rang B tel que $\sum_{i=\beta+1}^\infty |x_{k,i}| \le \epsilon/5$ pour tout $\beta \ge B$. Il suffit alors de choisir $\alpha \ge \max(A, B)$.
3. On a supposé que $\|x_k\|_1 > \epsilon$ pour tout k, c'est donc encore vérifié par la suite extraite. On a alors $\sum_{i=\alpha_l+1}^{\alpha_{l+1}} |y_{l,i}| = \|y_l\|_1 - \sum_{i=0}^{\alpha_l} |y_{l,i}| - \sum_{i=\alpha_{l+1}+1}^\infty |y_{l,i}| \ge \epsilon - \epsilon/5 - \epsilon/5 = 3\epsilon/5$.
4. On a $|\varphi(z)| = |\sum_{i=0}^\infty s_i z_i| \le \sum_{i=0}^\infty |s_i||z_i| = \sum_{i=0}^\infty |z_i| = \|z\|_1$, donc φ est une forme linéaire continue.
5. Notons $S_1 = \sum_{i=0}^{\alpha_l} s_i y_{l,i}$, $S_2 = \sum_{i=\alpha_l+1}^{\alpha_{l+1}} s_i y_{l,i}$, $S_3 = \sum_{i=\alpha_{l+1}+1}^\infty s_i y_{l,i}$. Par définition des s_i, les termes apparaissant dans S_2 sont $s_i y_{l,i} = \mathrm{sgn}(y_{l,i}) y_{l,i} = |y_{l,i}|$. On a donc $|S_2| = S_2 \ge 3\epsilon/5$ d'après la question 3. Par ailleurs on a $|S_1| \le \sum_{i=0}^{\alpha_l} |s_i||y_{l,i}| = \sum_{i=0}^{\alpha_l} |y_{l,i}| \le \epsilon/5$ par construction de $(y_l)_l$, et de même $|S_3| \le \epsilon/5$. On a alors $|\varphi(y_l)| = |\sum_{i=0}^\infty s_i y_{l,i}| = |S_1 + S_2 + S_3| \ge |S_1| - |S_2| - |S_3| \ge 3\epsilon/5 - \epsilon/5 - \epsilon/5 = \epsilon/5$.

   Mais $(y_l)_l$ est une suite extraite de $(x_k)_k$, donc elle converge encore faiblement vers 0, et comme φ est continue on devrait avoir $\varphi(y_l) \to 0$, ce qui contredit la minoration précédente.

Les suites convergentes sont donc les mêmes pour la topologie faible et pour la topologie normique sur $\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. C'est bien sûr une propriété très particulière à l'espace ℓ^1. Cela n'implique pas que les deux topologies sont égales (car la seconde n'est pas métrisable).