

## RÉVISIONS

Dans cette feuille, on appelle « équivalent simple de  $f$  en  $a$  » un équivalent de la forme  $C(x-a)^\alpha(\ln(x-a))^\beta$  avec  $C, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . On appelle « équivalent simple de  $f$  en  $+\infty$  » un équivalent de la forme  $Cx^\alpha(\ln x)^\beta e^{\gamma x}$ . Attention, certaines fonctions n'admettent pas d'équivalent simple !

### Exercice 1.

- Donner des équivalents simples de  $\cos(x)$ ,  $(1+x)^3$  en 0. A-t-on  $\cos(x) \sim_0 (1+x)^3$  ?
- Rappeler « les » équivalents en 0 des fonctions usuelles.  
Les fonctions suivantes sont-elles équivalentes en 0 :  $\sin x$ ,  $x$ ,  $x-x^3$ ,  $\tan(x)$ ,  $\cos(x)$  ?
- Donner des équivalents simples en 0 des fonctions suivantes :
  - $f : x \mapsto \frac{(\sin x)^2}{3x^2}$ ,
  - $g : x \mapsto \tan(x) \ln(1+x)$ ,
  - $h : x \mapsto \frac{x^4-2x^2}{2x^6+x^3}$ .
- Donner un équivalent simple en 0 des fonctions suivantes :
  - $i : x \mapsto \sin(x) + x^3$ ,
  - $j : x \mapsto \sin(x) - x$ .
- Parmi les fonctions  $f, g, h, i, j$ , lesquelles sont des  $O(x)$  ? des  $o(x)$  ?

### Exercice 2.

Donner des équivalents simples des fonctions suivantes, en 0 et en  $+\infty$  :

- $f : x \mapsto x^2 + x$ ,
- $g : x \mapsto x + \sqrt{x}$ ,
- $h : x \mapsto x + 1 + \ln(x)$ ,
- $i : x \mapsto \ln(x) + (\ln(x))^2$ ,
- $j : x \mapsto e^x + \sin(x)$ ,
- $k : x \mapsto \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ .

Lesquelles de ces fonctions sont des  $O(x)$  en 0 ? des  $o(x)$  ? et en  $+\infty$  ?

### Exercice 3.

En calculant des DL, donner des équivalents simples des fonctions suivantes aux points demandés :

- $f : x \mapsto 2e^x - \sqrt{1+4x} - \sqrt{1+6x^2}$  en 0,
- $g : x \mapsto \ln(1+x) + \ln(1-x)$  en 0,
- $h : x \mapsto \ln(x)$  en 0, 1, 2,  $+\infty$ ,
- $i : x \mapsto \sqrt{2+x} - \frac{x}{4} - \frac{3}{2}$  en 2,
- $j : x \mapsto \cos(x) - \sin(x)$  en  $\frac{\pi}{4}$ ,
- $k : x \mapsto e^x - e^{2-x}$  en 1,
- $l : x \mapsto \sqrt{x^2+1}$  en  $+\infty$ ,
- $m : x \mapsto \sqrt{x^2+1} - 2\sqrt[3]{x^3+x} + \sqrt[4]{x^4+x^2}$  en  $+\infty$ ,
- $n : x \mapsto \sin(x) - \cos(x)$  en 0,
- $p : x \mapsto \ln(x+1) - \ln(x)$  en  $+\infty$ .

### Exercice 4.

- Montrer que si  $f \sim_b g$  et  $\lim_a u = b$ , alors  $f \circ u \sim_a g \circ u$  (avec  $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ).
- Donner des équivalents simples des fonctions suivantes en 0 :
  - $f : x \mapsto \sin((x-1)^2)$  en 1,
  - $g : x \mapsto \tan(2\sqrt{x})$  en 0,
  - $h : x \mapsto x^2 \sin(\frac{1}{x})$  en  $+\infty$ .
- Donner des équivalents simples des fonctions suivantes :
  - $i : x \mapsto \arctan(x^2)$  en 0,
  - $j : x \mapsto \arccos(x)$  en 1.
- Montrer que  $\ln \circ u \sim_a u - 1$  si  $\lim_a u = 1$ .  
En déduire un équivalent simple de  $\ln(\cos x)$  en 0.

**Exercice 5.**

- a. (i) Les fonctions  $x \mapsto 2x$ ,  $x \mapsto 2x + 1$  sont-elles équivalentes en  $+\infty$ ?  
 Les fonctions  $x \mapsto e^{2x}$ ,  $x \mapsto e^{2x+1}$  sont-elles équivalentes en  $+\infty$ ?  
 Les fonctions  $x \mapsto 1+x$ ,  $x \mapsto 1+x^2$  sont-elles équivalentes en 0?  
 Les fonctions  $x \mapsto \ln(1+x)$ ,  $x \mapsto \ln(1+x^2)$  sont-elles équivalentes en 0?
- (ii) Soit  $u, v$  deux fonctions telles que  $u \sim_a v$ . A-t-on  $f \circ u \sim_a f \circ v$  pour toute fonction  $f$ ?
- b. (i) On suppose que  $u \sim_a v$ . Montrer que  $u^\alpha \sim_a v^\alpha$  pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
- (ii) On suppose que  $u \sim_a v$  et  $\lim_a u = \lim_a v = 0$  ou  $+\infty$ . Montrer que  $\ln \circ u \sim_a \ln \circ v$ .
- (iii) Donner des équivalents simples des fonctions suivantes aux points demandés :
- $f : x \mapsto \ln(x^2 + 1)$  en  $+\infty$ ,
  - $g : x \mapsto \sqrt{2x^3 + x^2}$  en 0,
  - $h : x \mapsto \ln(\sin(x))$  en 0.

**Exercice 6.** Déterminer des équivalents simples des suites suivantes :

- $r_n = 2n^2 - n$ ,
- $s_n = \sqrt{n} + (\ln n)^3 + \sin(n)$ ,
- $t_n = e^n + n^e$ ,
- $u_n = \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$ ,
- $v_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ ,
- $w_n = \sin\left(\frac{n+1}{n^2}\right)$ ,
- $x_n = \ln(1 + e^n)$ ,
- $y_n = \ln(1 + e^{-n})$ ,
- $z_n = \ln\left(\frac{n+1}{n^2+2}\right)$ .

Lesquelles de ces suites sont des  $o(n^2)$ ? des  $O(n^{-1})$ ?

**Exercice 7.** Pour chaque  $n \in \mathbb{N}$  on considère la fonction  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto x^n \ln(1 + x^2)$ .

On pose  $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$  et on cherche à étudier la suite  $(I_n)_n$ .

- a. Montrer que la suite  $(I_n)_n$  est décroissante. En déduire qu'elle converge.
- b. Trouver un majorant de  $\ln(1 + x^2)$  sur  $[0, 1]$ . En déduire que  $I_n = O(n^{-1})$ .  
 Quelle est la limite de la suite  $(I_n)_n$ ?
- c. On pose  $J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx$ .  
 En utilisant la même méthode que précédemment, déterminer la limite de la suite  $(J_n)_n$ .
- d. Montrer que  $I_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{2}{n+1} J_{n+2}$ . En déduire un équivalent de la suite  $(I_n)_n$ .

**Exercice 8.** Calculer les intégrales suivantes :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_1^2 \frac{dx}{x(1 + \ln x)}, \quad I_2 = \int_0^1 \frac{dx}{\ln x}, \quad I_3 = \int_0^1 \sqrt{1 - t^2} dt, \\ I_4 &= \int_0^1 x^2 e^x dx, \quad I_5 = \int_1^2 (\ln x)^2 dx, \quad I_6 = \int_1^e x(\ln x)^2 dx, \\ I_7 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos(2x) dx, \quad I_8 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(\sin x)^2} dx, \quad I_9 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos x)^3 (\sin x)^3}{1 + (\sin x)^2} dx, \\ I_{10} &= \int_0^1 \frac{e^x dx}{10 - 3e^x}, \quad I_{11} = \int_0^1 \frac{dx}{4x^2 + 9}. \end{aligned}$$

**Exercice 9.** Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{1}{1 + \sqrt{x}}, \quad f_2(x) = x^2 \sqrt{1 + x^3}, \quad f_3(x) = \frac{1 + \ln x}{x \ln x}, \quad f_4(x) = \frac{x^2}{2 + x^3}, \\ f_5(x) &= (x + 1)e^x, \quad f_6(x) = e^x \sin x, \quad f_7(x) = \arctan x, \quad f_8(x) = x \cos 2x, \\ f_9(x) &= \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2}, \quad f_{10}(x) = \frac{x}{x^3 - 3x + 2}, \quad f_{11}(x) = \frac{x\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}, \\ f_{12}(x) &= (x^2 - x + 3) \sin x, \quad f_{13}(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2}, \quad f_{14}(x) = \frac{\sin 3x}{\sqrt{\cos x}}. \end{aligned}$$