Séries numériques

Exercice 1. Déterminer la nature des séries données par les termes généraux suivants :

- $a_n = \dfrac{\cos n}{n^3}$,
- $b_n = \sin e^{-n}$,
- $c_n = n \sin \frac{1}{n}$,
- $d_n = \dfrac{2n+3}{2^n}$,
- $e_n = \dfrac{\sqrt{n}+1}{n + \ln n}$,
- $f_n = \arctan n$,
- $g_n = \dfrac{1}{n + (-1)^n \sqrt{n}}$,
- $h_n = \ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$,
- $i_n = \left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{\ln n}$,
- $j_n = \int_0^{\pi/2} \frac{(\cos x)^2}{n^2+(\cos x)^2} \mathrm{d}x$,
- $k_n = \dfrac{1}{\ln(n)\ln(\operatorname{ch} n)}$,
- $l_n = \arccos \sqrt[3]{1-n^{-2}}$,
- $m_n = \left(\cos \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{e}}$,
- $n_n = n^{-\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n})}$.

Exercice 2. Déterminer la nature des séries données par les termes généraux suivants :

- $a_n = \dfrac{n^2}{(n-1)!}$,
- $b_n = \left(\frac{n}{2}\right)^n$,
- $c_n = \left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^n$,
- $d_n = \left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^{(-1)^n n}$,
- $e_n = \dfrac{n!}{n^{2n}}$,
- $f_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}}$.

Exercice 3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$u_n = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-3)}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)}.$$

a. Quelle est la limite de la suite $\frac{u_{n+1}}{u_n}$?
Montrer que la suite $(nu_n)_n$ est croissante. En déduire la nature de la série $(\Sigma_n u_n)$.

b. Quelle est la limite de la suite $\frac{v_{n+1}}{v_n}$?
Montrer que pour tout $\alpha \in \left]0, \frac{3}{2}\right[$ on a $(n+1)^\alpha v_{n+1} \leq n^\alpha v_n$ à partir d'un certain rang.
En déduire la nature de la série $(\Sigma_n v_n)$.

Exercice 4. Étudier la nature des séries données par les termes généraux suivants :

$$a_n = (-1)^n \frac{\ln n}{n}, \quad b_n = \sin\left(\frac{(-1)^n}{n}\right), \quad c_n = \frac{(-1)^n}{2n+(-1)^n}, \quad d_n = \sin\left(\frac{\pi n^2}{n+1}\right).$$

Exercice 5. Soit $(u_n)_n$ une suite de réels positifs tels que la série $(\sum_n u_n)$ converge.

a. Montrer que la série $(\sum_n u_n^2)$ converge. Le résultat subsiste-t-il si on ne suppose plus les u_n positifs ?

b. Montrer que les séries $(\sum_n \frac{u_n}{n^2})$, $(\sum_n \frac{\sqrt{u_n}}{n})$ convergent. *Pour la deuxième on pourra utiliser Cauchy-Schwartz.*

c. Montrer que la suite des produits $P_n = \prod_{k=1}^n (1+u_k)$ a une limite quand n tend vers $+\infty$.

d. Soit $(v_n)_n$ une autre suite de réels positifs tels que la série $(\sum_n v_n)$ converge.
Montrer que la série $(\sum_n \sqrt{u_n v_n})$ converge.

Exercice 6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $a_n = \frac{1}{n^s}$ et $b_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$.

a. Étudier la convergence des séries $(\sum_{n\geq 1} a_n)$ et $(\sum_{n \geq 1} b_n)$, selon la valeur du paramètre réel s.

b. Lorsque $s > 1$, déterminer une relation entre $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ et $\eta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

c. Le paramètre s est maintenant un nombre complexe non nul.

(i) Montrer qu'on a $b_{2n-1} + b_{2n} = \frac{1-(1-\frac{1}{2n})^s}{(2n-1)^s}$. En déduire un équivalent simple de $b_{2n-1}+b_{2n}$.
On admet que le $DL_1(0)$ de $(1+t)^\alpha$ reste valable pour $\alpha \in \mathbb{C}$.

(ii) On écrit $s = r + i\theta$. Déterminer la forme trigonométrique du complexe n^s.
Montrer que $(\sum_{n\geq 1} b_{2n-1} + b_{2n})$ converge absolument si $r > 0$.

(iii) Étudier la convergence de la série $(\sum_{n \geq 1} b_n)$ selon la valeur du paramètre complexe s.

Exercice 7. Étudier la convergence des séries de termes généraux suivants :

$$u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right), \quad v_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right), \quad w_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}}, \quad x_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n n^\beta}.$$

Comparer la convergence de $\left(\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ et $\left(\prod_n (1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}})\right)$.

Exercice 8. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) = 0.$

Exercice 9. Calculer les sommes suivantes :

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}, \quad B = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n}}\right), \quad C = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2n-1}{n^3 - 4n}.$$

Exercice 10.

a. Calculer $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2+\cdots+n}$.

b. Calculer $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{4}{2n+1}\right)$. *On rappelle que* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$.

c. Calculer $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1^2+2^2+\cdots+n^2}$.

Exercice 11.

a. Calculer, pour tout $x \neq r$, la somme $s(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{r^k}$. Exprimer $s'(x)$ comme une somme.

b. Calculer les sommes suivantes :

$$A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4^k}, \quad B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{3^k}, \quad C = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{5^k}.$$

Exercice 12.

a. On pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, $u_n = H_n - \ln(n)$ et $v_n = \frac{1}{n}$.
   (i) Montrer que $(\sum(v_{n+1} - v_n))$ converge.
   (ii) Montrer que $u_{n+1} - u_n \sim \frac{1}{2}(v_{n+1} - v_n)$.
   (iii) Montrer que $(\sum(u_{n+1} - u_n))$ converge.
   (iv) En déduire l'existence d'une constante γ telle que $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$.
   Ce nombre γ est appelé constante d'Euler.

b. On pose $A_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$.
   (i) Vérifier que $A_{2n} = H_n - H_{2n}$.
   (ii) En déduire que $\lim A_{2n} = -\ln(2)$.
   (iii) Montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} = -\ln(2)$.

Exercice 13. On cherche à démontrer la *formule de De Moivre* $n! \sim C\sqrt{n}(\frac{n}{e})^n$.
Pour cela on va étudier la suite $u_n = \frac{n^n\sqrt{n}}{e^n n!}$. On pose $v_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$.

a. Simplifier l'expression de v_n. En utilisant un $DL_3(0)$ de $\ln(1+x)$, déterminer un équivalent simple de v_n.

b. Montrer que la série $(\sum v_n)$ converge.

c. En déduire que $(u_n)_n$ converge vers une limite non nulle. Conclure.

La valeur $C = \sqrt{2\pi}$ dans la formule de De Moivre a été déterminée par Stirling.

Exercice 14. Soit $(x_n)_n$ la suite définie par $x_0 > 1$ et la relation de récurrence $x_{n+1} = x_n + x_n^2$.

a. Démontrer que la suite $(x_n)_n$ tend vers $+\infty$.

b. On pose $u_n = 2^{-n} \ln x_n$ et $v_n = u_{n+1} - u_n$. Montrer que $v_n = o(2^{-n})$.

c. Démontrer que la série $(\sum_n v_n)$ converge.

d. En déduire qu'il existe $\alpha > 1$ tel que $x_n \geq \alpha^{2^n}$ à partir d'un certain rang.

Séries numériques (suite)

Exercice 15. On note $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
On se propose de retrouver l'équivalent $H_n \sim \ln(n)$ à l'aide d'une comparaison série-intégrale.

a. Montrer que pour tout $k > 1$ on a $\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}x}{x}$.

b. En déduire que $\int_2^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} \leq H_n - 1 \leq \int_1^n \frac{\mathrm{d}x}{x}$.

c. Conclure.

Exercice 16. Pour $s > 1$ on note $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$. À l'aide d'une comparaison série-intégrale, démontrer l'équivalent

$$\zeta(s) \sim_1 \frac{1}{s-1}.$$

On peut montrer qu'on a plus précisément $\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + o(1)$ où γ est la constante d'Euler.

Exercice 17. On note $S_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$.

a. Montrer qu'on a $\int_0^n \sqrt{x}\mathrm{d}x \leq S_n \leq \int_1^{n+1} \sqrt{x}\mathrm{d}x$.

b. En déduire un équivalent simple de S_n.

c. En utilisant la même méthode, déterminer un équivalent simple de $\ln(n!)$.
Comparer avec la formule de De Moivre.

Exercice 18. On note $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

a. À l'aide d'une comparaison série-intégrale, montrer que $S_n \sim 2\sqrt{n}$.

b. On pose $u_n = S_n - 2\sqrt{n}$.
   (i) Déterminer un équivalent simple de $u_{n+1} - u_n$.
   (ii) Montrer que $(\sum(u_{n+1} - u_n))$ converge.

c. Montrer qu'il existe un réel l tel que $S_n = 2\sqrt{n} + l + o(1)$.

Exercice 19. Pour $n,\, p \in \mathbb{N}^*$ on pose $a_{n,p} = \frac{1}{n^2-p^2}$ si $n \neq p$ et $a_{n,n} = 0$.

a. Montrer que pour tout p fixé, la série $(\sum_n a_{n,p})$ converge.

b. Vérifier que $a_{n,p} = \frac{1}{2p}(\frac{1}{n-p} - \frac{1}{n+p})$.

c. Calculer $\sum_{n=p+1}^{\infty} a_{n,p}$ et $\sum_{n=1}^{p-1} a_{n,p}$.

d. En déduire que pour tout p fixé on a $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,p} = \frac{3}{4p^2}$.

e. Montrer que la série $(\sum_p(\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,p}))$ converge.
En admettant que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$, calculer $\sum_{p=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,p}$.

f. Comparer $a_{n,p}$ et $a_{p,n}$. Quelle est la valeur de $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} a_{n,p}$?

g. La famille $(a_{n,p})_{n,p}$ est-elle sommable ?

Exercice 20. On fixe $a \in \mathbb{C}$ tel que $|a| < 1$ et on pose $u_{p,q} = a^{p(2q-1)}$.

a. Justifier la convergence des séries $(\sum_{p\geq 1} u_{p,q})$ et $(\sum_{q\geq 1} u_{p,q})$ et déterminer leurs sommes.

b. Montrer que la série $(\sum_{p\geq 1} \frac{|a|^p}{1-|a|^{2p}})$ converge.

c. Montrer que la famille $(u_{p,q})_{p,q\geq 1}$ est sommable et en déduire que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{1-a^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{2n-1}}{1-a^{2n-1}}.$$