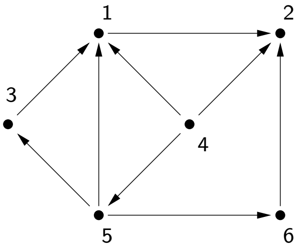
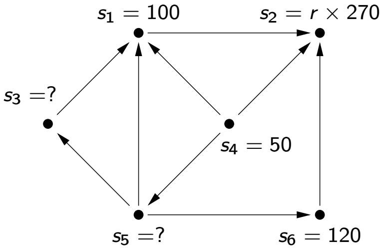
On considère le graphe $\mathbb{G}$ suivant à 6 sommets :



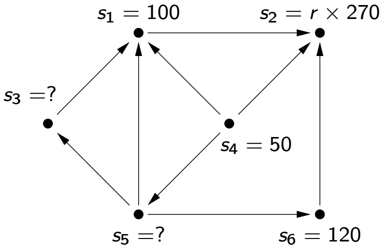
Cela pourrait être par exemple le graphe pour 6 pages web parlant de « valeur propre », avec des liens hypertexte entre les pages (sommets) symbolisés par les flèches (arêtes). On souhaite ordonner ces pages de la « plus importante » à la « moins importante »...

On souhaite classer les sommets du graphe $\mathbb{G}$:



Pour cela on veut attribuer un score $s_i > 0$ à chaque sommet i avec la règle suivante : (P) pour chaque page i, le score s_i est proportionnel à la somme des scores s_j des pages j qui ont un lien vers la page i. Ici le coefficient de proportionnalité $r > 0$ ne doit pas dépendre la page i considérée.

On souhaite classer les sommets du graphe $\mathbb{G}$:



Si A est la matrice d'adjacence du graphe $\mathbb{G}$, et $S = (s_1 \ s_2 \ \cdots \ s_6)$ est la ligne des scores, la règle (P) s'écrit $SA = rS$.

On convient de plus de *normaliser* les scores par proportionnalité, de manière à avoir $s_1 = 100$.

On note $T \twoheadrightarrow T'$ si la ligne T' est proportionnelle à T, et $t'_1 = 100$.

On note $T \to T'$ si la ligne T' est proportionnelle à T, et $t'_1 = 100$.

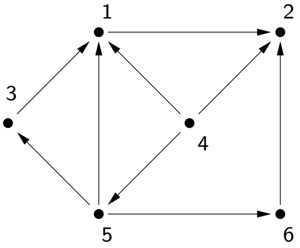
Theorem (Perron-Frobenius)

Soit A une matrice carrée de taille n à coefficients positifs. On suppose que A est primitive. *Alors :*

- *Il existe une unique ligne $S = (s_1 \ s_2 \ \cdots \ s_n)$ telle que $s_1 = 100$, $s_i > 0$ pour tout i, et $SA = rS$ pour un certain réel r.*
- *De plus r est alors la plus grande valeur propre de A.*
- *Enfin, si T est une ligne quelconque, et $TA^k \to T_k$, alors T_k converge vers S lorsque k tend vers l'infini.*

Ce théorème montre qu'il est possible de trouver des scores qui vérifient le propriété (P) recherchée, et donne un moyen d'en calculer des valeurs approchées, en utilisant les puissances de la matrice A.

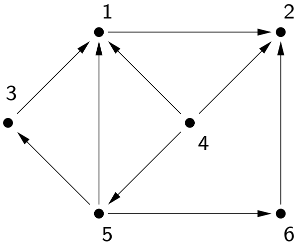
On considère le graphe $\mathbb{G}$ suivant à 6 sommets :



Sa matrice d'adjacence n'est *pas* primitive, ni même irréductible :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On considère le graphe $\mathbb{G}$ suivant à 6 sommets :

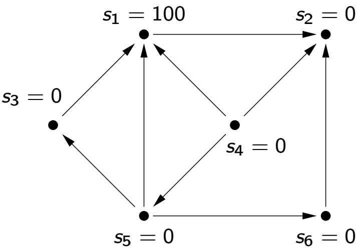


On la perturbe pour la rendre primitive :

$$B = \begin{pmatrix} 0.1 & 1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 1 & 1 & 0.1 & 0.1 & 1 & 0.1 \\ 1 & 0.1 & 1 & 0.1 & 0.1 & 1 \\ 0.1 & 1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \end{pmatrix}.$$

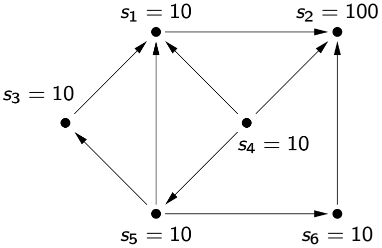
Maintenant on calcule les scores par itérations.
On commence avec les scores suivants :

$$T_0 = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



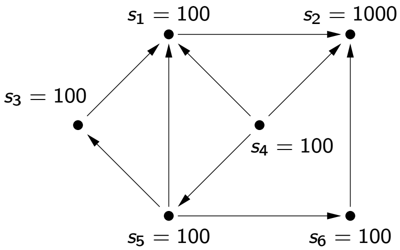
Maintenant on calcule les scores par itérations.
On multiplie par la matrice B :

$$T_0 B = \begin{pmatrix} 10 & 100 & 10 & 10 & 10 & 10 \end{pmatrix}$$



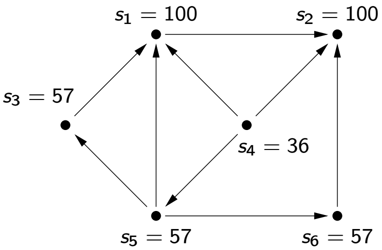
Maintenant on calcule les scores par itérations.
Puis on normalise par le premier score :

$$T_0 B \rightarrow T_1 = \begin{pmatrix} 100 & 1000 & 100 & 100 & 100 & 100 \end{pmatrix}$$



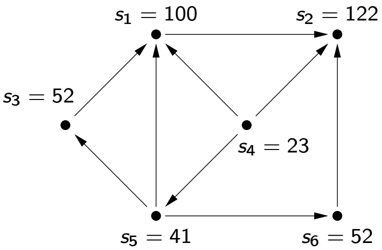
Maintenant on calcule les scores par itérations.
On recommence :

$$T_0 B^2 \rightarrow T_2 = \begin{pmatrix} 100 & 100 & 57 & 36 & 57 & 57 \end{pmatrix}$$



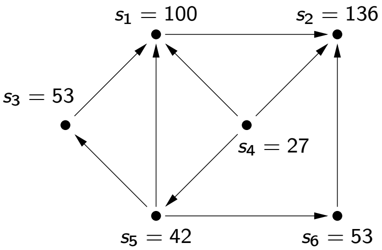
Maintenant on calcule les scores par itérations.
On recommence :

$$T_0 B^3 \rightarrow T_3 = \begin{pmatrix} 100 & 122 & 52 & 23 & 41 & 52 \end{pmatrix}$$



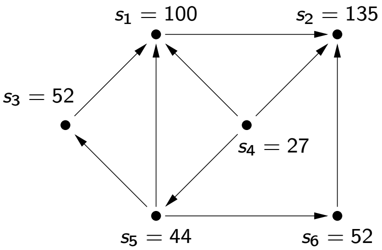
Maintenant on calcule les scores par itérations.
On recommence :

$$T_0 B^4 \rightarrow T_4 = \begin{pmatrix} 100 & 136 & 53 & 27 & 42 & 53 \end{pmatrix}$$



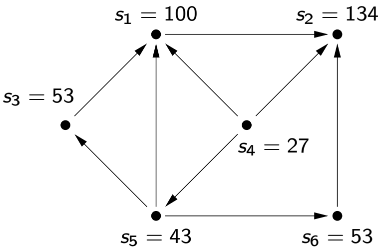
Maintenant on calcule les scores par itérations.
On recommence :

$$T_0 B^5 \rightarrow T_5 = \begin{pmatrix} 100 & 135 & 52 & 27 & 44 & 52 \end{pmatrix}$$



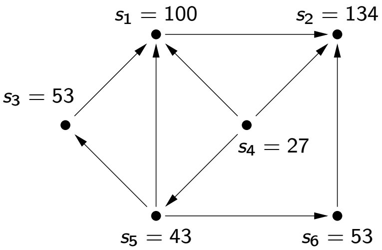
Maintenant on calcule les scores par itérations.
On recommence :

$$T_0 B^6 \rightarrow T_6 = \begin{pmatrix} 100 & 134 & 53 & 27 & 43 & 53 \end{pmatrix}$$



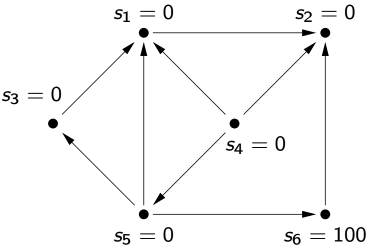
Maintenant on calcule les scores par itérations.
Les scores n'évoluent plus !

$$T_7 = T_8 = T_9 = \cdots = S = \begin{pmatrix}100 & 134 & 53 & 27 & 43 & 53\end{pmatrix}$$



Maintenant on calcule les scores par itérations.
Et si on commençait avec d'autres scores ?

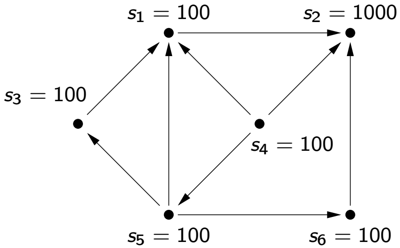
$$U_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100 \end{pmatrix}$$



$$S = \begin{pmatrix} 100 & 134 & 53 & 27 & 43 & 53 \end{pmatrix}$$

Maintenant on calcule les scores par itérations.
On recommence :

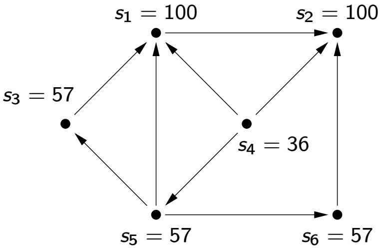
$$U_0 B \rightarrow U_1 = \begin{pmatrix}100 & 1000 & 100 & 100 & 100 & 100\end{pmatrix}$$



$$S = \begin{pmatrix}100 & 134 & 53 & 27 & 43 & 53\end{pmatrix}$$

Maintenant on calcule les scores par itérations.
On recommence :

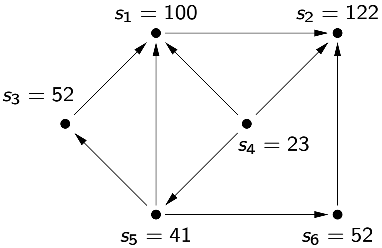
$$U_0 B^2 \rightarrow U_2 = \begin{pmatrix} 100 & 100 & 57 & 36 & 57 & 57 \end{pmatrix}$$



$$S = \begin{pmatrix} 100 & 134 & 53 & 27 & 43 & 53 \end{pmatrix}$$

Maintenant on calcule les scores par itérations.
On recommence :

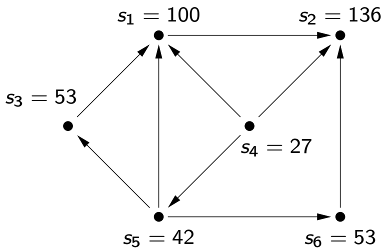
$$U_0 B^3 \rightarrow U_3 = \begin{pmatrix} 100 & 122 & 52 & 23 & 41 & 52 \end{pmatrix}$$



$$S = \begin{pmatrix} 100 & 134 & 53 & 27 & 43 & 53 \end{pmatrix}$$

Maintenant on calcule les scores par itérations.
On recommence :

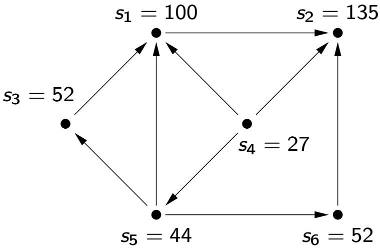
$$U_0 B^4 \rightarrow U_4 = \begin{pmatrix} 100 & 136 & 53 & 27 & 42 & 53 \end{pmatrix}$$



$$S = \begin{pmatrix} 100 & 134 & 53 & 27 & 43 & 53 \end{pmatrix}$$

Maintenant on calcule les scores par itérations.
On recommence :

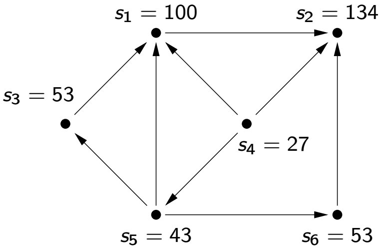
$$U_0 B^5 \rightarrow U_5 = \begin{pmatrix} 100 & 135 & 52 & 27 & 44 & 52 \end{pmatrix}$$



$$S = \begin{pmatrix} 100 & 134 & 53 & 27 & 43 & 53 \end{pmatrix}$$

Maintenant on calcule les scores par itérations.
On recommence :

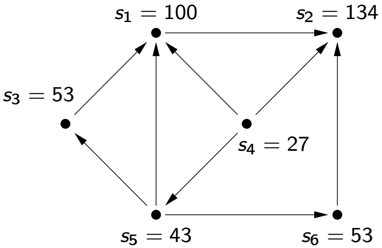
$$U_0 B^6 \rightarrow U_6 = \begin{pmatrix} 100 & 134 & 53 & 27 & 43 & 53 \end{pmatrix}$$



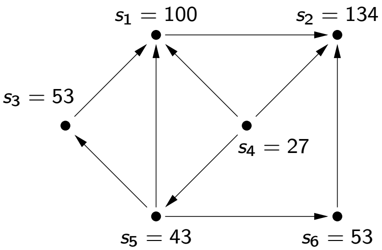
$$S = \begin{pmatrix} 100 & 134 & 53 & 27 & 43 & 53 \end{pmatrix}$$

Maintenant on calcule les scores par itérations.
Les scores n'évoluent plus ! et on retrouve S.

$$U_7 = U_8 = U_9 = \cdots = \begin{pmatrix} 100 & 134 & 53 & 27 & 43 & 53 \end{pmatrix}$$

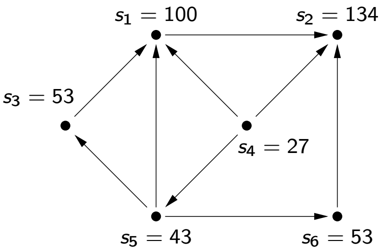


$$S = \begin{pmatrix} 100 & 134 & 53 & 27 & 43 & 53 \end{pmatrix}$$



Classement final :

1. score 134 : page 2
2. score 100 : page 1
3. score 53 : pages 3 et 6
4. score 43 : page 5
5. score 27 : page 4



Ce classement semble justifié « sur le dessin ».
La méthode marcherait encore avec un graphe à $\sim$8300000 sommets...
(Recherche Google : « valeur propre », 3 avril 2018)
Il faut être capable de calculer efficacement $T_0 B^k$ pour k élevé...