Université de Caen
UFR Sciences

Licence de Mathématiques
1er semestre 2017-2018

L2 Mathématiques – 1er semestre – Analyse

Corrigé du contrôle continu terminal

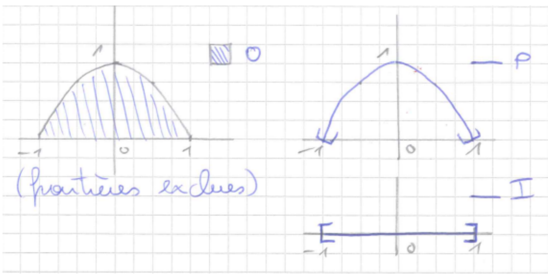
Exercice 1

1. On reconnaît une intégrale de Riemann en 0 avec exposant $\alpha = \frac{3}{2} > 1$. Donc elle diverge.
2. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $|\sin t| \leq 1$, donc $\frac{|\sin t|}{t^2} \leq \frac{1}{t^2}$. L'intégrale de $\frac{1}{t^2}$ converge en $+\infty$ (intégrale de Riemann avec $\alpha > 1$). D'après le théorème de comparaison pour les fonctions positives, l'intégrale de $\frac{|\sin t|}{t^2}$ converge en $+\infty$. Ainsi, l'intégrale de $\frac{\sin t}{t^2}$ converge absolument, donc elle converge en $+\infty$.
3. On a $\ln(1+t) \sim_0 t$ et $\sin t \sim_0 t$ donc $\frac{\ln(1+t)}{(\sin t)^2} \sim_0 \frac{1}{t}$. L'intégrale de $\frac{1}{t}$ diverge en 0^+ (intégrale de référence) et $\frac{1}{t}$ est positif sur $\mathbb{R}_+$, donc d'après le théorème de comparaison pour les équivalents, l'intégrale de $\frac{\ln(1+t)}{(\sin t)^2}$ diverge en 0^+.

Erreur fréquente : oublier d'invoquer les théorèmes de comparaison, et oublier de vérifier leurs hypothèses, notamment la positivité des fonctions. Encore quelques confusion entre le comportement de la fonction et celui de son intégrale. Il est inutile de parler d'intégrale de Bertrand quand il n'y a pas de log, préférer les intégrales de Riemann (qui sont beaucoup plus simples à étudier).

Exercice 2

1. On a $F = O \cup P \cup I$, et O, P, I sont représentés ci-dessous :



2. (a) On a $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0 \text{ et } x^2 + y \leq 1\} = g^{-1}([0,+\infty[) \cap h^{-1}(]-\infty,1])$ avec $g(x,y) = y$ et $h(x,y) = x^2 + y$. Comme ce sont des polynômes, g et h sont continues. De plus les intervalles $]-\infty, 1]$ et $[0,+\infty[$ sont des fermés de $\mathbb{R}$. Donc les images réciproques $g^{-1}([0,+\infty[)$ et $h^{-1}(]-\infty,1])$ sont des fermés. Finalement F est fermé car c'est l'intersection de deux fermés.

   (b) La suite des points $A_n = (0, 1 - \frac{1}{n})$ est à valeurs dans $O \cup I$, mais sa limite $A = (0,1)$ n'est pas dans $O \cup I$. Cela montre que la caractérisation séquentielle des fermés n'est pas vérifiée pour $O \cup I$.

3. (a) Pour $(x,y) \in F$ on a $0 \leq y \leq 1$ car $1 - x^2 \leq 1$, et $0 \leq 1 - x^2$ donc $x^2 \leq 1$ et $x \in [-1,1]$. Cela suffit à montrer que F est borné.

   (b) D'après 2a et 3a, F est un compact de $\mathbb{R}^2$. Par ailleurs f est continue car c'est un polynôme. Toute fonction continue est bornée et atteint ses bornes sur un compact, donc f admet un maximum global et un minimum global sur F.

4. (a) On calcule les dérivées partielles de $f(x,y) = 3x^2y + 2xy - 2x$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 6xy + 2y - 2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 + 2x.$$

   Les points critiques (x,y) de f sont donc les solutions du système $6xy + 2y - 2 = 0$, $3x^2 + 2x = 0$. La deuxième équation s'écrit $x(3x+2) = 0$, donc $x = 0$ ou $-\frac{2}{3}$. En reportant dans la première équation on trouve : lorsque $x = 0$, $2y - 2 = 0$ donc $y = 1$; et lorsque $x = -\frac{2}{3}$, $-2y - 2 = 0$ donc $y = -1$. Finalement les points critiques sont $(0,1)$ et $(-\frac{2}{3}, -1)$.

   (b) On sait que f admet des extrémums globaux sur F d'après 3b. Par l'absurde, supposons que l'un de ces extrémums soit atteint en un point A de O. En particulier, c'est un extrémum local sur O, et comme O est ouvert A est un point critique. Mais f n'admet pas de point critique dans O d'après 4a : contradiction. Comme $F = O \cup P \cup I$, on en déduit donc que les extrémums globaux de f sur F sont forcément atteints en des points de $P \cup I$.

5. (a) Les points de I sont de la forme $(x,0)$ avec $x \in [-1,1]$ et on a $f(x,0) = -2x$. La fonction $(x \mapsto -2x)$ est strictement décroissante donc sur $[-1,1]$ elle atteint son maximum en $x = -1$ et minimum en $x = 1$. Donc sur I, f admet 2 comme maximum, atteint en $(-1,0)$, et -2 comme minimum, atteint en $(1,0)$.

   (b) Les points de P sont de la forme $(x, 1-x^2)$ avec $x \in [-1,1]$ et on a $f(x,1-x^2) = \varphi(x) = (3x^2+2x)(1-x^2) - 2x = -3x^4 - 2x^3 + 3x^2$. Étudions cette fonction : on a $\varphi'(x) = -12x^3 - 6x^2 + 6x = -6x(2x^2 + x - 1)$. Les racines du trinôme $2x^2 + x - 1$ sont -1 et $\frac{1}{2}$ et on peut tracer le tableau de variation :

x	-1		0		$\frac{1}{2}$		1
$-6x$		$+$	0	$-$		$-$	
$2x^2+x-1$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$\varphi'(x)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$\varphi(x)$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{5}{16}$	$\searrow$	-2

Les extrémums globaux de φ sur $[-1,1]$ sont 2 et -2, atteints respectivement en -1 et 1, donc les extrémums globaux de f sur P sont 2 et -2, atteints respectivement en $(-1,0)$ et $(1,0)$. De plus f admet sur P un minimum local en $(0,0)$ et un maximum local en $(\frac{1}{2},\frac{3}{4})$.

(c) D'après 4b les extrémums globaux de f sur F sont atteints sur $P \cup I$. Le maximum global de f sur P vaut 2, celui sur I vaut également 2, atteint au même point $(-1,0)$. Donc le maximum global de f sur F est 2, atteint en $(-1,0)$. De même, le minimum global de f sur F est -2, atteint en $(1,0)$.

Erreurs fréquentes :

— remplacer les inégalités $0 \leq y \leq 1-x^2$ dans la définition de F par des inégalités non équivalentes, par exemple $0 \leq x^2+y \leq 1$ (il faut ajouter x^2 au trois membres de l'encadrement), ou $0 \leq y \leq 1$, $-1 \leq x \leq 1$ (ces inégalités décrivent un rectangle qui contient F mais n'est pas égal à F) ;

— oubli de l'hypothèse de continuité pour l'image réciproque d'un fermé, ou pour le théorème des bornes sur un compact ;

— confusion entre la notion de fonction bornée et celle de partie bornée dans $\mathbb{R}^2$, notion d'image réciproque pas bien comprise ;

— la relation entre extrémums locaux et points critiques n'est vraie que pour l'étude sur un ouvert.

Exercice 3

1. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ car c'est le quotient

— du polynôme x^2y+x^3, qui est continu, et

— de l'expression $x^2+|y|$, qui est continue car c'est le cas des polynômes et de la fonction « valeur absolue ».

Pour être encore plus précis, la fonction $((x,y) \mapsto |y|)$ *est la composée de la projection* $((x,y) \mapsto y)$*, qui est continue, et de la fonction valeur absolue* $(t \mapsto |t|)$.

2. (a) Pour $|y| \leq 1$ on a $y^2 \leq |y|$ donc $x^2+|y| \geq x^2+y^2 = \|(x,y)\|_2^2$. Pour tout y on a $y^2 \geq 0$, donc $x^2 \leq x^2+y^2$, et en appliquant la fonction « racine carrée », qui est croissante, aux deux membres de cette inégalité on obtient $|x| \leq \|(x,y)\|_2$. De même $|y| \leq \|(x,y)\|_2$.

(b) Fixons $\epsilon > 0$. Il faut trouver $\alpha > 0$ tel que $d((x,y),(0,0)) \leq \alpha \Rightarrow d(f(x,y),f(0,0)) \leq \epsilon$. Or on a, en appliquant l'inégalité triangulaire puis les inégalités de la question précédente :

$$d(f(x,y),f(0,0)) = |f(x,y)-0| = \frac{|x^2y+x^3|}{x^2+|y|} \leq \frac{x^2|y|+|x|^3}{x^2+|y|} \leq \frac{\|(x,y)\|_2^3+\|(x,y)\|_2^3}{\|(x,y)\|_2^2} = 2\|(x,y)\|_2.$$

On pose alors $\alpha = \frac{\epsilon}{2} > 0$. Pour $\|(x,y)\|_2 = d((x,y),(0,0)) \leq \alpha$, l'inégalité ci-dessus montre que $d(f(x,y),f(0,0)) \leq 2\alpha = \epsilon$. On a bien démontré la continuité de f en $(0,0)$.

3. La première application partielle de f en $(0,0)$ est $g_1 : x \mapsto f(x,0) = x$. Elle est dérivable en 0, donc f admet une dérivée partielle par rapport à x en $(0,0)$, égale à $g_1'(0) = 1$. De même, $g_2(y) = f(y,0) = 0$ pour tout y donc f admet une dérivée partielle par rapport à y en $(0,0)$, égale à $g_2'(0) = 0$.

4. (a) On dérive le quotient par rapport à x, en tenant compte de l'égalité $|y| = y$ pour $y > 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{(2xy+3x)(x^2+y)-(x^2y+x^3)(2x)}{(x^2+y)^2} = \frac{x^4+3x^2y+2xy^2}{(x^2+y)^2}.$$

(b) On observe grâce aux questions 3 et 4a que

$$\lim_{y \to 0^+} \frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \lim_{y \to 0^+} \frac{0}{y^2} = 0 \neq \frac{\partial f}{\partial x}(0,0).$$

Donc la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en $(0,0)$ et f n'est pas de classe C^1.

Erreurs communes :

— faire comme si $|y|$ était un polynôme en x, y ;

— manipulation hasardeuses ou non justifiées d'inégalités dans la quesion 2a : comme pour les égalités, il y a des règles de calcul à respecter ;

— utilisation de la règle de dérivation des quotients en $(0,0)$ où le quotient n'est pas défini.