L2 Mathématiques – 1^{er} semestre
Contrôle continu – Analyse
14 décembre 2017 – 2 heures

Les documents, calculatrices et téléphones portables ne sont pas autorisés.
Le barême tiendra compte de la longueur du sujet, et une attention particulière sera portée à la qualité de la rédaction et au soin de la copie. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1

1. L'intégrale de $\dfrac{1}{t\sqrt{t}}$ converge-t-elle en 0^+ ?
2. L'intégrale de $\dfrac{\sin t}{t^2}$ converge-t-elle en $+\infty$?
3. L'intégrale de $\dfrac{\ln(1+t)}{(\sin t)^2}$ converge-t-elle en 0^+ ?

On justifiera précisément les réponses, notamment pour les deux dernières intégrales.

Exercice 2
On considère les sous-ensembles suivant de $\mathbb{R}^2$:

$$F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1 - x^2\}, \qquad O = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y < 1 - x^2\},$$
$$P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 1 - x^2 \text{ et } y \geq 0\}, \qquad I = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0 \text{ et } -1 \leq x \leq 1\}.$$

On considère par ailleurs la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto (3x^2+2x)y - 2x$.

1. Représenter O, P, et I sur un dessin. Exprimer F à l'aide de O, P et I.
2. (a) Montrer que F est un fermé de $\mathbb{R}^2$.
   (b) Montrer que $O \cup I$ n'est pas fermé dans $\mathbb{R}^2$.
3. (a) Montrer que F est borné.
   (b) Montrer que f admet un maximum global et un minimum global sur F.
4. (a) Déterminer les points critiques de f sur $\mathbb{R}^2$.
   (b) Montrer que les extrémums globaux de f sur F sont atteints en des points de $P \cup I$.
   On ne cherchera pas à déterminer ces points.
5. (a) Déterminer les extrémums de f sur I et préciser en quels points ils sont atteints.
   (b) Déterminer les extrémums de f sur P et préciser en quels points ils sont atteints.
   On pourra étudier la fonction $\varphi : x \mapsto f(x, 1-x^2)$.
   (c) Quels sont les extrémums globaux de f sur F ? En quels points sont-ils atteints ?

Exercice 3
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y + x^3}{x^2 + |y|} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Justifier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
2. (a) Justifier les inégalités suivantes, pour $(x,y) \in [-1,1]^2$:
   $$x^2 + |y| \geq \|(x,y)\|_2^2, \qquad |x| \leq \|(x,y)\|_2, \qquad |y| \leq \|(x,y)\|_2.$$
   (b) Montrer que f est continue en $(0,0)$.
3. Montrer que f admet des dérivées partielles par rapport à x et y en $(0,0)$ et les calculer.
4. (a) Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ lorsque $y > 0$.
   (b) La fonction f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?