Université de Caen
UFR Sciences
M1 Maths

2e semestre 2017-2018
Mathématiques
Analyse fonctionnelle

Compacité

Exercice 1. Soit $(F_n)_n$ une suite de fermés emboîtés non vides dans un espace topologique compact X. On note $F = \bigcap_n F_n$. Soit O un ouvert tel que $F \subset O$. Montrer qu'il existe n tel que $F_n \subset O$.
Indication : on pourra poser $O_n = O \cup {}^c F_n$.

Exercice 2. On munit $M_n(\mathbb{R})$ de la norme $\|(m_{ij})_{ij}\| = \max_{ij} |m_{ij}|$. On note $O_n \subset M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales. Montrer que O_n est compact.

Exercice 3. Soit E un EVN. On note B la boule unité fermée de E et S la sphère unité de E. Montrer que B est compacte si et seulement si S est compacte. Pour quels espaces E la sphère S est-elle compacte ?

Exercice 4. On fixe un $\mathbb{R}$-EVN de dimension finie E, et des normes sur E et $L(E)$.

a. On fixe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $v \in E$. Montrer que $F = \{f \in L(E) \mid f(v) = \lambda v\}$ est fermé.
b. On fixe $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $G = \{f \in L(E) \mid \exists v \neq 0 \; f(v) = \lambda v\}$ est fermé.

Exercice 5. On définit une suite de fonctions $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ par récurrence en posant, pour tout $t \in [0,1]$: $f_0(t) = 0$ et $f_{n+1}(t) = f_n(t) + \frac{1}{2}(t - f_n(t)^2)$.

a. On fixe $t \in [0,1]$. Étudier la suite récurrente $(f_n(t))_n$.
On montrera notamment qu'elle est croissante et converge vers un réel $g(t)$ que l'on calculera.
b. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers g.

Exercice 6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on considère la fonction $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, t \mapsto 1 - (1-t)^n$.

a. Montrer que la suite $(f_n)_n$ est croissante est converge simplement.
b. Montrer que chaque fonction f_n est croissante et continue.
c. La suite $(f_n)_n$ converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?
d. Soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue, nulle en 0 et positive. Montrer que la suite $(gf_n)_n$ converge uniformément sur $[0,1]$.
e. Soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et nulle en 0. Montrer que le résultat précédent reste vrai.
On pourra considérer $\max(g,0)$ *et* $\min(g,0)$.
f. Soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ bornée telle que $g(0) = \lim_0 g = 0$. Montrer que le résultat précédent reste vrai.

Exercice 7.

a. Soit X, Y des espaces métriques compacts et $h : X \times Y \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $\epsilon > 0$. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ et des fonctions continues $f_1, \ldots, f_n : X \to \mathbb{R}$, $g_1, \ldots, g_n : Y \to \mathbb{R}$ telles qu'on ait $|h(x,y) - \sum_{i=1}^n f_i(x) g_i(y)| \leq \epsilon$ pour tout $(x,y) \in X \times Y$.
b. Montrer que toute fonction continue $h : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ est limite uniforme de fonctions polynomiales.

Exercice 8. Soit $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ le disque unité fermé dans $\mathbb{C}$. On note $A \subset C(D,\mathbb{C})$ le sous-espace des fonctions polynômiales $f(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ (avec $a_k \in \mathbb{C}$) et on munit $C(D,\mathbb{C})$ de la norme du sup.

a. Montrer que A est une sous-algèbre unifère de $C(D,\mathbb{C})$ qui sépare les points.
b. Montrer que l'application $\varphi : f \mapsto (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \mathrm{d}t$ est continue sur $C(D,\mathbb{C})$.
c. Montrer que pour tout $f \in A$ on a $\varphi(f) = f(0)$.
d. Montrer que A n'est pas dense dans $C(D,\mathbb{C})$.
e. Quelle hypothèse faut-il rajouter au théorème de Stone-Weierstraß dans le cas de fonctions à valeurs complexes ?

Exercice 9. Soit X un espace métrique et $f_n \in C(X,\mathbb{R})$ une suite décroissante de fonctions qui converge simplement vers la fonction nulle.

a. (i) On fixe $x \in X$ et $\epsilon > 0$. On suppose que $f_n(x) \leq \epsilon/2$.
Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $f_p(y) \leq \epsilon$ pour tout $p \geq n$ et tout $y \in X$ tel que $d(x,y) \leq \alpha$.
(ii) Montrer que la suite $(f_n)_n$ est équicontinue.
b. On suppose de plus que X est compact.
À l'aide d'un lemme du cours, montrer que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément.

Exercice 10. On considère l'espace $E = C([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme $\|\cdot\|_\infty$, et l'espace $F = C^1([0,1],\mathbb{R})$ de muni de la norme $N : f \mapsto \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. On fixe un sous-espace $V \subset E \cap F$ fermé dans E.

a. Montrer que V est fermé dans F. Montrer que $\mathrm{Id} : (V, N) \to (V, \|\cdot\|_\infty)$ est continue.
D'après le théorème des isomorphismes de Banach, l'application réciproque est également continue.

b. Montrer que les normes $\|\cdot\|_\infty$ et N sont équivalentes sur le sous-espace V.

c. On note $\bar{B}$ la boule unité fermée de V relativement à la norme $\|\cdot\|_\infty$.
Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que toutes les fonctions $f \in \bar{B}$ sont lipschitziennes de rapport C.

d. Montrer que $\bar{B}$ est équicontinue.

e. Montrer que V est nécessairement de dimension finie.

Exercice 11. Soit E un $\mathbb{R}$-EVN et $K \subset E$ une partie compacte, convexe, non vide. Soit $T \in L'(E)$ une application linéaire (ou affine) continue telle que $T(K) \subset K$. On veut montrer qu'il existe $x \in K$ tel que $T(x) = x$. Pour cela on note $T_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} T^k$.

a. Montrer que $T_n(K)$ est un fermé contenu dans K pour tout n.

b. Montrer que $T_n T_m = T_m T_n$.
En déduire que $T_{n_1}(K) \cap \cdots \cap T_{n_p}(K)$ est non vide pour toute famille finie d'indices $n_1, \ldots, n_p$.

c. Montrer que $L = \bigcap_n T_n(K)$ est non vide. On fixe $x \in L$.

d. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et on choisit $y \in K$ tel que $x = T_n(y)$. Calculer $T(x) - x$ en fonction de y. Conclure.

Exercice 12. *(Partiel 2017)*
On considère une série de fonctions $(\sum_{k\in\mathbb{N}^*} f_k)$ avec $f_k \in C([0,1],\mathbb{R})$ pour tout k. On suppose que la série converge simplement sur $[0,1]$. On note $S_n : x \mapsto \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ les sommes partielles et $S : x \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ la somme de la série.

a. On suppose que les fonctions f_k sont à *valeurs positives* et que S est continue sur $[0,1]$.
Montrer que $(S_n)_n$ converge uniformément sur $[0,1]$.

b. On considère le cas où $f_k(t) = \frac{1}{k}(t^k - t^{k+1})$.
Calculer S et montrer que la série de fonctions $(\sum f_k)$ converge uniformément sur $[0,1]$.

c. On considère le cas où $f_k(t) = -t^k \ln(t)$, $f(0) = 0$.
La série $(\sum f_k)$ converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?

Exercice 13. *(Partiel 2017)*
Soit E un espace vectoriel normé et $T \in L'(E)$ une application linéaire continue.
Pour tout nombre complexe λ on note $E_\lambda(T) = \{x \in E \mid T(x) = \lambda x\}$.
On note $B = \{x \in E \mid \|x\| \le 1\}$ la boule unité fermée de E et $\lambda B = \{\lambda x \mid x \in B\} = \{x \in E \mid \|x\| \le |\lambda|\}$.

On suppose que l'adhérence de $T(B)$ dans E est compacte et on fixe $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

a. Montrer que $\lambda B \cap E_\lambda(T) \subset T(B)$.

b. Montrer que $B \cap E_\lambda(T)$ est compact.

c. Montrer que le sous-espace propre $E_\lambda(T)$ est de dimension finie.

Exercice 14. *(Partiel 2017)*
Soit $K \in C([0,1]^2, \mathbb{R})$. On considère l'opérateur à noyau $T : C([0,1],\mathbb{R}) \to C([0,1],\mathbb{R})$ associé à K, c'est-à-dire donné par la formule

$$T(f)(s) = \int_0^1 K(s,t) f(t)\mathrm{d}t,$$

pour $f \in C([0,1],\mathbb{R})$ et $s \in [0,1]$. On admet que $T(f)$ est bien un élément de $C([0,1],\mathbb{R})$.
On munit $[0,1]$ de la distance usuelle et $[0,1]^2$ de la distance $d((s,t),(s',t')) = \max(|s-s'|, |t-t'|)$.
On munit $C([0,1],\mathbb{R})$ et $C([0,1]^2,\mathbb{R})$ de la norme du sup, notée $\|\cdot\|_\infty$.

a. Rappeler les théorèmes (et notamment leurs hypothèses) qui permettent d'affirmer :
— que K est bornée sur $[0,1]^2$,
— que K est uniformément continue sur $[0,1]^2$.

b. Montrer que l'application linéaire T est continue.

c. On fixe $\epsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel qu'on ait $|T(f)(s) - T(f)(s')| \le \epsilon \|f\|_\infty$ pour toute $f \in C([0,1],\mathbb{R})$ et tous s, $s' \in [0,1]$ tels que $|s - s'| \le \alpha$.

d. On note $B = \{f \in C([0,1],\mathbb{R}) \mid \|f\|_\infty \le 1\}$ la boule unité fermée de $C([0,1],\mathbb{R})$.
Montrer que l'adhérence de $T(B)$ dans $C([0,1],\mathbb{R})$ est compacte.
On pourra appliquer le théorème d'Ascoli.