Courbes paramétrées

Exercice 1. Étudier (domaine d'étude, variations, branches infinies avec asymptotes éventuelles, points singuliers) et construire les courbes paramétrées suivantes :

- $a : \begin{cases} x = \sin(2t) \\ y = \sin(3t) \end{cases}$ (courbe de Lissajous),
- $b : \begin{cases} x = e^t \\ y = t^2 \end{cases}$,
- $c : \begin{cases} x = \frac{t}{1+t^4} \\ y = \frac{t^3}{1+t^4} \end{cases}$ (lemniscate de Bernoulli),
- $d : \begin{cases} x = \sin 2t + 2\sin t \\ y = -2\cos t - \cos 2t \end{cases}$ (cardioïde),
- $e : \begin{cases} x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ y = \frac{2t}{1+t^2} \end{cases}$ (quelle est cette courbe ?),
- $f : \begin{cases} x = t\cos t \\ y = t\sin t \end{cases}$,
- $g : \begin{cases} x = t\sqrt{1-t^2} \\ y = t(1-t^2) \end{cases}$,
- $h : \begin{cases} x = 2-t^2 \\ y = t\sqrt{t^4-4t^2+3} \end{cases}$ (courbe elliptique),
- $i : \begin{cases} x = e^t\cos(2\pi t) \\ y = e^t\sin(2\pi t) \end{cases}$ (spirale),
- $j : \begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$ (astroïde),
- $k : \begin{cases} x = \sqrt{t+\frac{1}{t-1}} \\ y = \sqrt{t-\frac{1}{t+1}} \end{cases}$,
- $l : \begin{cases} x = 2t^2 - t \\ y = t^2 + \ln(t) + 1 \end{cases}$.

Exercice 2. *La cycloïde.* Un cercle $\mathcal{C}$ de rayon 1 roule sans glisser sur l'axe Ox. On note M un point fixé de $\mathcal{C}$ et on se propose d'étudier la trajectoire de M. On note Ω le centre (mobile) de $\mathcal{C}$ et I le point de contact (mobile) de $\mathcal{C}$ avec l'axe Ox. Soit t l'abscisse de I. On suppose que $M = I$ quand $t = 0$.

Déterminer en fonction de t les coordonnées de M. (On pourra remarquer que t est une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega I}})$. Étudier cette courbe paramétrée : domaine d'étude, variations, points singuliers avec tangentes.

Exercice 3. *La strophoïde.* On définit la courbe paramétrée :

$$\begin{cases} x = \frac{t^2-1}{t^2+1} \\ y = t\frac{t^2-1}{t^2+1} \end{cases}$$

Faire l'étude de cette courbe (domaine d'étude, variations, points singuliers) et déterminer ses points multiples. Déterminer les tangentes en les points multiples.