Convexité et Dualité

Exercice 1. Soit E un EVN, $F \subset E$ un sous-espace vectoriel, et G un EVN de dimension finie.

a. Montrer que toute application linéaire continue $S \in \mathcal{L}(F, G)$ peut se prolonger en un application linéaire continue $T \in \mathcal{L}(E, G)$.

b. On suppose F de dimension finie.
   (i) Montrer que F est fermé.
   (ii) Montrer qu'il existe $T \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $T(x) = x$ pour tout $x \in F$.
   (iii) Monter que F admet un supplémentaire fermé.

Exercice 2. On considère $E = \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ et l'opérateur borné $S : E \to E$ donné par $S(x) = (x_{k+1})_k$ si $x = (x_k)_k \in E$. On note $I = \mathrm{Im}(S - \mathrm{Id}) \subset E$, e la suite constante égale à 1, et $C = \mathbb{R}e$ le sous-espace des suites constantes. On définit une forme linéaire $L_0 : I + C \to \mathbb{R}$ en posant $L_0((S - \mathrm{Id})(x) + \lambda e) = \lambda$.

a. Montrer que I et C sont en somme directe. Ainsi L_0 est bien définie.

b. On considère la forme linéaire $c_n \in E'$ donnée par $c_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} x_k$ si $x = (x_k)_k$.
   (i) Montrer que pour $z \in I + C$ on a $L_0(z) = \lim c_n(z)$.
   (ii) En déduire que L_0 est continue.

c. Montrer qu'il existe une forme linéaire $L \in E'$ telle que $\|L\| = 1$, $L(e) = 1$ et $L \circ S = L$.

Dans la suite on fixe une telle forme linéaire L.
Remarque : on peut montrer qu'il existe une infinité de formes linéaires L convenables.

d. (i) Soit $x = (x_k)_k$, $y = (y_k)_k$ deux suites dans E.
   On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x_k = y_k$ pour tout $k \geq n$.
   Montrer que $L(x) = L(y)$.
   (ii) Montrer que $L(x) = 0$ pour toute suite $x \in c_0(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ qui tend vers 0.
   En déduire que si la suite $x = (x_k)_k \in E$ converge, on a $L(x) = \lim_{k\infty} x_k$.

e. On considère $x = (1, 0, 1, 0, 1, \dots) \in E$. Calculer $L(x)$. *On pourra utiliser $S(x)$.*
   A-t-on $L(xy) = L(x)L(y)$ pour toutes les suites x, $y \in E$?

f. Questions subsidiaires.
   Soit $x = (x_k)_k \in E$ telle que $x_k \geq 0$ pour tout x. En considérant $\|x\|e - x$, montrer que $L(x) \geq 0$.
   Montrer que pour toute suite $x = (x_k)_k \in E$ on a $\liminf x_k \leq L(x) \leq \limsup x_k$.

Exercice 3. Soit E un EVN et $C \subset E$ une partie convexe fermée. On considère

$$A = \{(\varphi, m) \in E' \times \mathbb{R} \mid m \leq \inf \varphi(C)\}.$$

Montrer que $C = \bigcap_{(\varphi,m)\in A} \{x \in E \mid \varphi(x) \geq m\}$.
Ainsi tout convexe fermé est une intersection de demi-espaces fermés.

Exercice 4. On considère $E = L^2([0, 1], \mathbb{R})$ et les sous-ensembles

$$C_\alpha = \{f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) \mid f(0) = \alpha\}.$$

a. Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, C_α est convexe.

b. On fixe $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que toute fonction $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ est limite dans E de fonctions $g \in C_\alpha$.
   On pourra approcher f par une fonction $g \in C_\alpha$ égale à f sur un intervalle du type $[\epsilon, 1]$.

c. Montrer que C_α est dense dans E.

d. Montrer que, pour $\alpha \neq \beta$, il n'existe pas d'hyperplan fermé qui sépare C_α de la fonction constante β.

Exercice 5. *(Examen 2017)*
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. On munit $E \times E$ de la norme $\|(x,y)\| = \|x\| + \|y\|$.
Soit $K \subset E$ un compact convexe non vide.
Soit $f : K \to K$ une application continue. On suppose de plus que f est *affine*, c'est-à-dire que pour tous x, $x' \in K$ et $\lambda \in [0,1]$ on a $\lambda f(x) + (1-\lambda)f(x') = f(\lambda x + (1-\lambda)x')$.
On note $G(f) \subset K \times K$ le graphe de f, et on considère également $D = \{(x,x) \mid x \in K\} \subset K \times K$.
Le but de l'exercice est de montrer que f admet un point fixe, et on procède par l'absurde. On suppose donc que f n'admet pas de point fixe.

a. Montrer que $G(f)$ et D sont des convexes compacts de $E \times E$.
   On notera que E n'est pas nécessairement de dimension finie.
b. Montrer qu'il existe une forme linéaire continue $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ et α, $\beta \in \mathbb{R}$ tels que $\varphi(x,x) \le \alpha < \beta \le \varphi(x', f(x'))$ pour tous x, $x' \in K$.
c. Montrer qu'il existe deux formes linéaires continues φ_1, $\varphi_2 : E \to \mathbb{R}$ telles que $\varphi(x_1, x_2) = \varphi_1(x_1) + \varphi_2(x_2)$ pour tous x_1, $x_2 \in E$.
d. Montrer que pour tout $x \in K$ on a $\varphi_2(f(x)) - \varphi_2(x) \ge \beta - \alpha$.
   Montrer que pour tout $x \in K$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $\varphi_2(f^n(x)) - \varphi_2(x) \ge n(\beta - \alpha)$.
e. Conclure.

Exercice 6. Soit E un espace vectoriel normé et $\varphi \in E \to \mathbb{K}$ une forme linéaire.

a. On suppose que φ n'est pas continue.
   (i) Montrer qu'il existe une suite de vecteurs $v_n \in E$ tels que $\|v_n\| \le \frac{1}{n}$ et $\varphi(v_n) = 1$.
   (ii) Soit $v \in E$ quelconque. Construire à l'aide de $(v_n)_n$ une suite de vecteurs $w_n \in \operatorname{Ker} \varphi$ tels que $\lim w_n = v$.
b. Montrer que φ est continue **ssi** son noyau est fermé.
   Ce résultat reste-t-il vrai pour une application linéaire $f : E \to F$?

Exercice 7.

On va démontrer l'équivalence des normes en dimension finie en utilisant l'exercice précédent et la complétude.

On remarque que $\mathbb{K}^n$ est complet pour les normes usuelles, et donc n'importe quel $\mathbb{K}$-evn E de dimension finie admet une norme qui le rend complet. En particulier, si toutes les normes sont équivalentes sur E, alors E est complet pour n'importe quelle norme.

On procède par récurrence sur $n = \dim E$. Pour $n = 0$ il y a une seule norme sur E donc le résultat est vrai. On suppose maintenant le résultat vrai en dimension $n \ge 0$ et on fixe un $\mathbb{K}$-evn E de dimension $n+1$.

On fixe une norme $\|\cdot\|$ sur E, une décomposition $E = H \oplus D$ avec $\dim D = 1$ et on note $p : E \to D$ la projection sur D parallèlement à H. Pour $h \in H$, $d \in D$ on note $\|h + d\|_1 = \|h\| + \|d\|$.

a. Montrer que $\|\cdot\|_1$ est une norme sur E et que pour tout $v \in E$ on a $\|v\| \le \|v\|_1$.
b. Montrer que p est continue. On note $|||p|||$ sa norme subordonnée à la norme $\|\cdot\|$.
c. Montrer que pour tout $v \in E$ on a $\|v_1\| \le (1 + 2|||p|||)\|v\|$.
d. Conclure.