

ESPACES DE BANACH

Exercice 1. Soit X un espace métrique complet et $(f_n)_n$ une suite de fonctions *continues* de X dans \mathbb{R} qui converge simplement vers une fonction $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. On sait qu'en général f n'est pas continue. On va montrer cependant que les points $x \in X$ où f est continue forment une partie dense de X . Pour ce faire on considère les sous-ensembles $F_{\epsilon,n} \subset X$ définis, pour tout $\epsilon > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$F_{\epsilon,n} = \{x \in X \mid \forall p \geq n \quad |f_p(x) - f_n(x)| \leq \epsilon\}.$$

- a. Montrer que les parties $F_{\epsilon,n}$ sont fermées dans X .
- b. On fixe $\epsilon > 0$.
 - (i) Montrer que la réunion des $F_{\epsilon,n}$, lorsque n parcourt \mathbb{N} , est égale à X .
 - (ii) Montrer que $U_\epsilon = \bigcup_n F_{\epsilon,n}^\circ$ est un ouvert dense de X .
- c. On considère $C = \bigcap_{\epsilon>0} U_\epsilon$.
 - (i) Écrire l'assertion « $x \in C$ » avec des quantificateurs, sans utiliser les sous-ensembles $F_{\epsilon,n}$. Qu'obtient-on en faisant tendre p vers $+\infty$ dans cette assertion ?
 - (ii) Écrire la définition de la continuité de f_n en x . Montrer que f est continue en x .
- d. Conclure.
- e. Application. Soit I un intervalle de \mathbb{R} non vide et non réduit à un point. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Montrer que les points où f' est continue forment une partie dense de I .

Exercice 2. On munit $E = \mathcal{C}([0,1])$ de la norme de la convergence uniforme et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on considère le sous-ensemble suivant de E :

$$U_n = \{f \in E \mid \forall x \in [0,1] \quad \exists y \in [0,1] \quad |f(x) - f(y)| > n|x - y|\}.$$

- a. Montrer que U_n est un ouvert dense de E . *On admettra que toute fonction continue sur $[0,1]$ est limite uniforme de fonctions affines par morceaux dont les pentes sont plus grandes que n en valeur absolue.*
- b. Montrer qu'il existe une partie dense de $\mathcal{C}([0,1])$ dont les éléments ne sont dérivables en aucun point de $[0,1]$.

Exercice 3. Soit E un espace de Banach.

- a. Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel de E distinct de E . Montrer que F ne contient aucune des boules $B(0,r)$, pour $r > 0$. Montrer que F est d'intérieur vide.
- b. On suppose que E est réunion de sous-espaces fermés F_n . Montrer qu'il existe n tel que $E = F_n$.
- c. Montrer qu'un espace de Banach de dimension infinie n'admet pas de base (algébrique) dénombrable.

Exercice 4. Soit E un espace de Banach, décomposé sous la forme $E = F \oplus G$. On note p la projection sur F parallèlement à G .

- a. Exprimer F et G à l'aide de p . En déduire que si p est continue, F et G sont fermés.
- b. À l'aide du théorème du graphe fermé, montrer que si F et G sont fermés alors p est continue.

Exercice 5. (Examen 2017) Soit E, F des espaces de Banach non nuls, $S \in \mathcal{L}(E, F)$. On pose $E_0 = \text{Ker}(S) \subset E$.

- a. On suppose qu'il existe $T \in \mathcal{L}(F, E)$ tel que $S \circ T = \text{Id}$.
 - (i) Montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel qu'on ait $\|T(y)\| \geq \epsilon \|y\|$ pour tout $y \in F$.
En déduire que $\text{Im}(T)$ est fermée.
 - (ii) *Question d'algèbre.* Montrer que S est surjective et que $\text{Im}(T)$ est un supplémentaire de $\text{Ker}(S)$.
- b. On ne suppose plus l'existence d'un inverse à droite T .
On suppose que S est surjective et que $E_0 = \text{Ker}(S)$ admet un supplémentaire fermé $E_1 \subset E$.
On note $S_1 : E_1 \rightarrow F$ la restriction de S à E_1 .
 - (i) Montrer que S_1 est une bijection et que la bijection réciproque est continue.
 - (ii) Montrer qu'il existe $T \in \mathcal{L}(F, E)$ telle que $S \circ T = \text{Id}$.

Exercice 6. On cherche à estimer la norme dans $L^1([0, 2\pi])$ du noyau de Dirichlet

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^n e^{ikt} = \frac{\sin((2n+1)t/2)}{\sin(t/2)}.$$

Pour cela on découpe l'intégrale aux points où D_n change de signe :

$$\|D_n\|_1 = 2 \int_0^\pi |D_n(t)| dt = 2 \sum_{k=0}^{n-1} I_{n,k} + 2 \int_{\frac{2n\pi}{2n+1}}^\pi |D_n(t)| dt, \quad \text{avec} \quad I_{n,k} = \int_{\frac{2k\pi}{2n+1}}^{\frac{2(k+1)\pi}{2n+1}} |D_n(t)| dt.$$

- a. En utilisant l'inégalité $\sin x \leq x$ valable sur \mathbb{R}_+ , montrer que $I_{n,k} \geq 4/((k+1)\pi)$.
- b. En déduire que $\|D_n\|_1$ tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 7. Soit E l'espace des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continues et 2π -périodiques, muni de la norme de la convergence uniforme. On note $c_k(f) = \int_0^{2\pi} e^{-ikt} f(t) dt$ le k^e coefficient de Fourier de $f \in E$ et $S_n(f) : t \mapsto \sum_{k=-n}^n c_k(f) e^{ikt} \in E$ les sommes partielles symétriques de la série de Fourier associée à f . On fixe $t \in [0, 2\pi]$ et on considère la forme linéaire $L_n : f \mapsto S_n(f)(t)$.

- a. Montrer que $L_n(f) = \int_0^{2\pi} f(s) D_n(t-s) ds$, où D_n est le noyau de Dirichlet introduit à l'exercice 6.
- b. Montrer que $\|L_n\| = \|D_n\|_1$. *On pourra utiliser la densité de $C([0, 1])$ dans $L^1([0, 1])$.*
- c. À l'aide du théorème de Banach-Steinhaus, montrer qu'il existe une fonction $f \in E$ telle que la série de Fourier de f ne converge pas au point t .

Exercice 8. On considère le \mathbb{R} -espace vectoriel $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ et on note $\|\cdot\|_\infty$ la norme de la convergence uniforme sur E . Pour $t \in [0, 1]$ on note φ_t l'application linéaire $\varphi_t : E \rightarrow \mathbb{R}$, $f \mapsto f(t)$.

On se donne de plus une autre norme $N : E \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie les deux propriétés suivantes :

- (E, N) est complet ;
 - si f_n converge vers f relativement à N alors f_n converge simplement vers f .
- a. Montrer que pour tout $t \in [0, 1]$ l'application φ_t est continue relativement à N .
 - b. On fixe $f \in E$. Montrer que la famille de nombres réels $\varphi_t(f)$, avec $t \in [0, 1]$, est bornée.
 - c. Montrer qu'il existe une constante $K > 0$ telle que $\|f\|_\infty \leq KN(f)$ pour toute $f \in E$.
On pourra utiliser le théorème de Banach-Steinhaus.
 - d. Montrer que N est équivalente à $\|\cdot\|_\infty$.
On pourra appliquer un théorème du cours à l'application $\text{Id} : E \rightarrow E$.

Exercice 9. (*Écrit agreg 2013, partie IV, extrait*)

Pour tout segment $S = [a, b] \subset [0, 1]$ on considère l'espace de fonctions continues $E_S = C(S, \mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme sur S notée $\|f\|_S = \sup_{t \in S} |f(t)|$.

On considère un sous-espace fermé $F \subset E_S$ tel que toutes les fonctions $f \in F$ sont de classe C^1 sur S .

Pour $x \neq y$ dans S et $f \in E_S$ on pose $\varphi_{x,y}(f) = (f(x) - f(y))/(x - y)$.

- a. Montrer que $\varphi_{x,y}$ est une forme linéaire continue sur E_S .
- b. Montrer que pour $f \in F$ fixée l'ensemble $\{\varphi_{x,y}(f) \mid x, y \in S, x \neq y\}$ est borné dans \mathbb{R} .
- c. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute $f \in F$ et tous $x \neq y$ dans S on ait

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y| \|f\|_S.$$

- d. On fixe des points $a = t_0 < t_1 < \dots < t_l = b$ tels que $|t_{k+1} - t_k| \leq C^{-1}$ pour tout k .
Montrer que pour toute $f \in F$ on a $\sup_{t \in S} |f(t)| \leq \max_k |f(t_k)| + \frac{1}{2} \|f\|_S$.
- e. Montrer que F est de dimension finie.