Université de Caen
UFR de Droit et Sciences Politiques
L1 AES

2017-2018
Mathématiques
2e semestre

Fiche de TD n° 2

Objectifs : savoir résoudre un système de deux équations linéaires à deux inconnues et inverser une matrice carrée d'ordre deux ; savoir discuter un système de deux équations linéaires à deux inconnues avec un paramètre ; savoir calculer directement la puissance n^e d'une matrice carrée d'ordre deux qui a deux valeurs propres distinctes. Tous les nombres considérés sont réels.

Exercice 1. On considère les matrices carrées $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer et comparer $A(B + C)$ et $AB + AC$.

Exercice 2. On considère les matrices carrées $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
Calculer et comparer AB et BA.

Exercice 3. On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.
Calculer AB. Calculer et comparer AC et AD.

Exercice 4.

a. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 13 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer A^2 ; en déduire l'inverse de A.

b. Soit $B = \begin{pmatrix} 0 & -13 \\ \frac{1}{13} & 0 \end{pmatrix}$. Calculer B^2 ; en déduire l'inverse de B.

c. Essayer de généraliser les résultats des questions précédentes.

Exercice 5. Si λ est un nombre réel, on considère la matrice $T_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Vérifier : $T_3 \times T_8 = T_{11}$.

b. Généraliser le résultat obtenu à la question précédente.

c. Vérifier que $T_{-\lambda}$ est la matrice inverse de T_λ.

Exercice 6. Écrire chacun des systèmes d'équations linéaires suivants sous la forme matricielle $AX = C$, où A est une matrice carrée, C est une matrice colonne et $X = \binom{x}{y}$ est la colonne des inconnues :

$$\begin{cases} 3x - 10y = 3 \\ 2x + 15y = -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5x - y = 6a \\ 3x + y = 2a \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + my = 5 \\ x - y = m \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 6y = \lambda x \\ x + 2y = \lambda y \end{cases}$$

Exercice 7. En posant $X = \binom{x}{y}$, écrire dans chacun des cas suivants l'égalité matricielle $AX = C$ sous la forme d'un système d'équations linéaires d'inconnues x et y :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & m \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 \\ m^2 \end{pmatrix}$$

Exercice 8. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$.

a. Calculer A^2 et en déduire que A est la matrice inverse de A.

b. Utiliser le résultat précédent pour résoudre le système $\begin{cases} 5x - 4y = 6 \\ 6x - 5y = 7 \end{cases}$.

Exercice 9. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ et le polynôme $P(x) = x^2 + 2x - 11$.

a. Calculer $P(A)$, c'est-à-dire $A^2 + 2A - 11I$.

b. On pose $B = \frac{1}{11}(A + 2I)$. En utilisant a), montrer que B est la matrice inverse de A.

c. Expliciter les coefficients de B.

d. Utiliser ce qui précède pour résoudre le système $\left\{ \begin{array}{l} x + 2y = p \\ 4x - 3y = q \end{array} \right.$ où p et q sont donnés.

Exercice 10. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Calculer le déterminant de P et la matrice complémentaire de P.

b. En déduire la matrice inverse de P.

Exercice 11. Résoudre les systèmes d'équations linéaires suivants (proposer plusieurs méthodes) :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + y = 1 \\ 3y = 9 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} x + y = 1 \\ 3x + 4y = 7 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} 2x + 3y = 1 \\ 5x + 7y = 3 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x - y = 3 \\ 10x - 3y = 0 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} 3x - 10y = 3 \\ 2x + 15y = -2 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} 3x - 5y = 4 \\ x - 2y = -5 \end{array} \right.$$

Exercice 12. Dire si les systèmes linéaires suivants ont : aucune solution, une solution, ou une infinité de solution. Lorsqu'il y a une infinité de solutions, en donner au moins deux.

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 4y = 1 \\ 2x + 5y = 3 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} 2x - 3y = -10 \\ -6x + 9y = 3 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} 2x - 3y = -10 \\ -6x + 9y = 30 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -33x + y = 0 \\ 100x - 3y = 0 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} -7x + y = 0 \\ 133x - 19y = 0 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} 2x + \sqrt{2}\, y = 0 \\ \sqrt{2}\, x + y = 0 \end{array} \right.$$

Exercice 13.
On considère la fonction f de deux variables donnée par $f(x, y) = 5x^2 + 5xy + y^2 - 15x - 3y + 7$.

a. Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ (cf cours du premier semestre).

b. Chercher les points critiques de f, c'est-à-dire les couples (x, y) tels que $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$.

Exercice 14. Un capital de 50000 euros est partagé en deux parties. La première partie est placée à 6% et la seconde à 8%. Le revenu annuel est le même que si tout le capital était placé à 6, 8%. Calculer la valeur de chaque partie du capital ainsi placé.

Exercice 15. On considère deux biens de consommation dont les marchés sont interdépendants. On note respectivement O_1 et D_1 l'offre et la demande relatives au premier bien, et p_1 son prix unitaire. De même, on note O_2 et D_2 l'offre et la demande du second bien et p_2 son prix unitaire. On suppose :

$$\left\{ \begin{array}{l} O_1 = -2 + p_1 \\ O_2 = -1 + p_2 \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad \left\{ \begin{array}{l} D_1 = 2 - 8p_1 + 3p_2 \\ D_2 = 1 + 6p_1 - p_2 \end{array} \right.$$

Montrer qu'il n'existe pas de prix p_1, p_2 permettant d'équilibrer offre et demande ($O_1 = D_1$ et $O_2 = D_2$).

Exercice 16. On considère le système de deux équations linéaires à deux inconnues x et y :

$$\left\{ \begin{array}{l} 9x + 8y = mx \\ 3x + 4y = my \end{array} \right.$$

a. Mettre ce système sous la forme matricielle standard $AX = C$, où $X = \binom{x}{y}$.

b. On suppose $m = 11$. Trouver toutes les solutions du système obtenu.

c. On suppose $m = 12$. Trouver toutes les solutions du système obtenu.

Exercice 17. On pose $A = \begin{pmatrix} 3 & m \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

a. Calculer le déterminant de A.

b. À quelle condition sur m la matrice inverse de A existe-t-elle ?

c. Écrire, dans le cas où elle existe, la matrice inverse A^{-1}.

d. Utiliser A^{-1} pour résoudre le système d'équations linéaires $\begin{cases} 3x + my = 4 \\ x - 2y = m. \end{cases}$

Exercice 18. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -a & 1 \end{pmatrix}$.

a. Calculer le déterminant de A.

b. À quelle condition sur a la matrice inverse de A existe-t-elle ?

c. Écrire, dans le cas où elle existe, la matrice inverse A^{-1}.

d. Le revenu d'un individu se partage selon l'équation $r = c + i$, où c est sa consommation et e son épargne. Sa consommation dépend de son revenu selon la loi $c = c_0 + ar$, où c_0 et a sont des constantes ; son épargne $i = i_0$ est constante. Calculer son revenu et sa consommation d'équilibre.

Exercice 19.
Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes linéaires suivants (on discutera en fonction du paramètre m) :

$$\begin{cases} 11x - y = m \\ -100x + 9y = 2m \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + my = 5 \\ x - y = m \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2y + 3 = 0 \\ 3x + my - 2m + 3 = 0 \end{cases}$$

Exercice 20. Soit $A = \begin{pmatrix} -7 & 6 \\ -9 & 8 \end{pmatrix}$.

a. Calculer la trace et le déterminant de A. Écrire son polynôme caractéristique $P_A(x)$.

b. En utilisant le théorème de Cayley-Hamilton, prouver que $A^2 = A + 2I$.
Vérifier en calculant A^2.

c. Exprimer aussi A^3, A^4 et A^5 comme des combinaisons linéaires de A et I (c'est-à-dire sous la forme $\alpha A + \beta I$, avec des nombres α et β à calculer dans chaque cas).

Exercice 21. Soit $A = \begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Calculer la trace et le déterminant de A. Écrire son polynôme caractéristique $P_A(x)$.

b. En utilisant le théorème de Cayley-Hamilton, écrire A^2 comme combinaison linéaire de A et I.

c. En déduire une expression de A^{-1} comme combinaison linéaire de A et I.

Exercice 22. Soient $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = A + I$.

a. Calculer la trace et le déterminant de A. Écrire son polynôme caractéristique $P_A(x)$.

b. Trouver A^2 en utilisant le théorème de Cayley-Hamilton.

c. Montrer que $B^2 = 3A + I$ et écrire les coefficients de B^2.

Exercice 23. Soient $A = \begin{pmatrix} -a & 1 \\ -a^2 & a \end{pmatrix}$ et $B = A + I$.

a. Calculer la trace et le déterminant de A. Écrire son polynôme caractéristique $P_A(x)$.

b. Trouver A^2 en utilisant le théorème de Cayley-Hamilton.

c. Montrer que $B^2 = 2A + I$ et écrire les coefficients de B^2.

d. Pour n entier ≥ 2, exprimer B^n en fonction de I et A et écrire les coefficients de B^n.

Exercice 24. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On pose $B = A^2$, puis $C = B^2$ et $D = C^2$.

a. En utilisant le théorème de Cayley-Hamilton, écrire B comme combinaison linéaire de A et I.

b. Obtenir aussi C et D comme combinaison linéaire de A et I.

c. Écrire les coefficients de A^8.

Exercice 25. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$.

a. Calculer la trace et le déterminant de A. Écrire son polynôme caractéristique $P_A(x)$.

b. Trouver les *valeurs propres* de A, c'est-à-dire les racines (éventuelles) de $P_A(x)$.

Exercice 26. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 9 & 89 \\ 3 & 95 \end{pmatrix}$.

a. Calculer la trace et le déterminant de A. Écrire son polynôme caractéristique $P_A(x)$.

b. Trouver les valeurs propres de A.

c. En déduire deux nombres dont la somme est 104 et le produit est 588.

Exercice 27. Soit M une matrice à deux lignes et deux colonnes, de trace 13 et de déterminant 12.

a. Exprimer M^2 comme combinaison linéaire de M et de I.

b. Trouver les valeurs propres de M.

c. Trouver un exemple d'une telle matrice.

Exercice 28. Soit A une matrice à deux lignes et deux colonnes.

a. À quelle condition sur $\operatorname{Tr} A$ et $\det A$ la matrice A a-t-elle deux valeurs propres distinctes ?

b. Quelle est alors la somme de ces deux valeurs propres ? Quel est leur produit ?

Exercice 29. Soient $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ deux matrices à deux lignes et deux colonnes.

a. Calculer et comparer $\operatorname{Tr}(AB)$ et $\operatorname{Tr}(BA)$.

b. En déduire que AB et BA ont les mêmes valeurs propres.

c. Peut-on trouver deux matrices A et B telles que $AB - BA = I$?

Exercice 30. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et on veut calculer directement A^7.

a. Calculer la trace et le déterminant de A. Écrire son polynôme caractéristique $P_A(x)$.

b. Montrer que A a deux valeurs propres distinctes et les calculer.

c. Trouver les nombres α et β tels que chaque valeur propre r de A vérifie $r^7 = \alpha r + \beta$.

d. On rappelle qu'on a alors $A^7 = \alpha A + \beta I$. Écrire la matrice A^7.

Exercice 31. On pose $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$ et on veut calculer directement A^{10}.

a. Calculer la trace et le déterminant de A. Écrire son polynôme caractéristique $P_A(x)$.

b. Montrer que A a deux valeurs propres distinctes et les calculer.

c. Trouver les nombres α et β tels que chaque valeur propre r de A vérifie $r^{10} = \alpha r + \beta$.

d. On rappelle qu'on a alors $A^{10} = \alpha A + \beta I$. Écrire la matrice A^{10}.