Université de Caen
UFR de Droit et Sciences Politiques
L1 AES

2017-2018
Mathématiques
2$^{\text{e}}$ semestre

Fiche de TD n° 3

Objectifs : savoir inverser une matrice carrée d'ordre trois et résoudre un système de trois équations linéaires à trois inconnues dans le cas où la matrice des coefficients est inversible ; savoir discuter l'inversibilité d'une matrice carrée d'ordre trois avec un paramètre ; savoir calculer directement la puissance n^e d'une matrice carrée d'ordre trois qui a trois valeurs propres distinctes. Tous les nombres considérés sont réels.

Exercice 1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a. Calculer A^2.

b. En déduire la matrice inverse A^{-1} de la matrice A.

c. Trouver sans calcul A^n pour tout entier $n \geq 3$.

Exercice 2. On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

a. Calculer AB et BA.

b. En déduire la matrice inverse A^{-1} de la matrice A.

c. Utiliser A^{-1} pour trouver la solution du système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} x + y + z = 9 \\ 2x - y - z = 3 \\ -x + 2y - z = 6. \end{cases}$$

Exercice 3. On considère la matrice $N = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, où a, b, c sont des nombres donnés.

a. Calculer N^2 et N^3.

b. N est-elle inversible ?

Exercice 4. Une seule des trois matrices suivantes est inversible : laquelle ?

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 4 \\ -1 & 11 & 8 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 4 \\ -1 & 11 & 7 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 4 \\ -1 & 9 & 7 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. Pour chacune des matrices A suivantes, calculer son déterminant $\det A$ et sa matrice complémentaire $\tilde{A}$. Donner aussi, dans le cas où elle existe, sa matrice inverse A^{-1}.

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

a. Calculer la matrice complémentaire de A.

b. Calculer le déterminant de A et montrer que A est inversible.

c. Calculer la matrice inverse A^{-1} de la matrice A.

d. Utiliser A^{-1} pour trouver la solution du système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 18 \\ 2x + y + 2z = 17 \\ 2x + 2y + 3z = 25. \end{cases}$$

Exercice 7. On considère la matrice $B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & 3 \\ 16 & 17 & 11 \end{pmatrix}$.

a. Calculer la matrice complémentaire de B.

b. Calculer le déterminant de B et montrer que B est inversible.

c. Calculer la matrice inverse B^{-1} de la matrice B.

d. Utiliser B^{-1} pour trouver la solution du système d'équations linéaires

$$\begin{cases} 3x + 3y + 2z = 33 \\ 6x + 2y + 3z = 53 \\ 16x + 17y + 11z = 180. \end{cases}$$

Exercice 8. On considère la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 25 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Calculer la matrice complémentaire de B.

b. Calculer le déterminant de B et montrer que B est inversible.

c. Calculer la matrice inverse B^{-1} de la matrice B.

d. Utiliser B^{-1} pour trouver la solution du système d'équations

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 1 \\ 4\alpha + 2\beta + \gamma = 32 \\ 25\alpha + 5\beta + \gamma = 3125. \end{cases}$$

Exercice 9. Résoudre le système $AX = C$, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 9 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Exercice 10. Calculer le déterminant de la matrice $A = \begin{pmatrix} a+1 & 1 & a \\ 1 & a & -1 \\ a & -1 & a+1 \end{pmatrix}$.

Pour quelles valeurs de a cette matrice est-elle inversible ?

Exercice 11. Calculer le déterminant de la matrice $M = \begin{pmatrix} m+3 & -1 & 1 \\ 5 & m-3 & 1 \\ 6 & -6 & m+4 \end{pmatrix}$.

Pour quelles valeurs de m la matrice M est-elle inversible ?

Exercice 12. Calculer le déterminant de la matrice $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & a & 0 \\ 1 & 1 & 0 & a \\ 4 & 0 & a & 0 \end{pmatrix}$.

Pour quelles valeurs de a cette matrice est-elle inversible ?

Exercice 13. On considère trois biens B_1, B_2, B_3 dont les marchés sont interdépendants. Pour chaque bien B_i, on note p_i son prix unitaire, D_i sa demande et O_i son offre. On suppose que D_i diminue avec p_i et que O_i augmente avec p_i selon les formules suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l} D_1 = 2 - p_1 + p_2 + p_3 \\ D_2 = 10 + p_1 - 2p_2 + p_3 \\ D_3 = 5 + p_1 + p_2 - p_3 \end{array}\right. \qquad \text{et} \qquad \left\{\begin{array}{l} O_1 = -2 + p_1 \\ O_2 = -2 + p_2 \\ O_3 = -3 + 2p_3 \end{array}\right.$$

Existe-t-il des prix d'équilibre p_1, p_2, p_3, c'est-à-dire tels que $D_i = O_i$ pour tout i ?

Exercice 14. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 6 & 5 & 12 \\ -3 & -3 & -7 \end{pmatrix}$.

a. Calculer le polynôme caractéristique de A.

b. En utilisant le théorème de Cayley-Hamilton, montrer que $B = \frac{1}{2}(A^2 - 3I)$ est l'inverse de A.

c. Trouver les valeurs propres de A.

Exercice 15. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

a. Calculer la matrice A^2.

b. Calculer le polynôme caractéristique de A et vérifier qu'il s'écrit $P_A(x) = x^3 - 8x^2 + 17x - 10$.

c. Trouver les trois valeurs propres de A.

d. Trouver les nombres α, β et γ tels que chaque valeur propre r de A vérifie $r^5 = \alpha r^2 + \beta r + \gamma$. On pourra utiliser les résultats de l'exercice 8.

e. On rappelle qu'on a alors $A^5 = \alpha A^2 + \beta A + \gamma I$. Écrire la matrice A^5.

Exercice 16. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

On veut calculer rapidement A^n, où n est un entier naturel fixé.

a. Calculer A^2.

b. Calculer le polynôme caractéristique de A.

c. Trouver les valeurs propres de A.

d. Trouver les nombres α, β et γ tels que chaque valeur propre r de A vérifie $r^n = \alpha r^2 + \beta r + \gamma$.

e. Écrire la matrice A^n, sachant que $A^n = \alpha A^2 + \beta A + \gamma I$.