Calcul de l'intégrale de Gauss par Laplace

On souhaite calculer l'intégrale « de Gauss » $G = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x$, qui est une intégrale impropre convergente.

Un des premiers calculs connus de G est dû à Pierre-Simon de Laplace (né en 1749 à Beaumont-en-Auge et mort en 1827) dans son mémoire *La probabilité des causes par les événements* (1774). Il utilise un calcul publié en 1768 par Leonhard Euler (1707–1783) dans le traité *Institutionum calculi integralis* (Fondations du calcul intégral, 1768) et relié aux intégrales de Wallis (1616-1703). Une autre méthode qui serait due à Siméon Denis Poisson (1781–1840) utilise un changement de coordonnées polaire. Enfin, c'est Carl Friedrich Gauss (1777–1855) qui a donné son nom à la « loi normale ».

Euler commence par calculer les intégrales

$$W_k = \int_0^1 \frac{x^k \mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}},$$

qui correspondent aux intégrales de Wallis $W_k = \int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^k \mathrm{d}\theta$ par le changement de variable $x = \sin\theta$. Il utilise pour cela la méthode maintenant « classique » qui repose sur une relation de récurrence entre W_{k+1} et W_{k-1} obtenue par IPP. Il déduit de son calcul la relation également classique :

$$W_{2k}W_{2k+1} = \frac{1}{2k+1}\frac{\pi}{2}.$$

Puis il effectue le changement de variable $x = t^\alpha$, avec $\alpha = 1/(2k+1)$:

$$W_{2k} = \alpha\int_0^1 \frac{t^{2k\alpha}t^{\alpha-1}\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^{2\alpha}}} = \alpha\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^{2\alpha}}} \quad \text{et} \quad W_{2k+1} = \alpha\int_0^1 \frac{t^\alpha \mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^{2\alpha}}}.$$

On obtient ainsi

$$\boxed{2\alpha\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^{2\alpha}}}\int_0^1 \frac{t^\alpha \mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^{2\alpha}}} = \pi.}$$

Laplace part de ce calcul et fait tendre α vers 0. Le DL de l'exponentielle (ou la valeur de la dérivée de $(\alpha \mapsto t^\alpha)$ en $\alpha = 0$) montre que

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{2\alpha}{1-t^{2\alpha}} = \lim_{\alpha\to 0} \frac{2\alpha}{1-\exp(2\alpha\ln(t))} = -\frac{1}{\ln t}.$$

Par ailleurs pour $t \in]0,1[$ on a $\lim_{\alpha\to 0} t^\alpha = 1$. Sans justifier les interversions limite/intégrale, Laplace en déduit que

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{-\ln t}}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{-\ln t}} = \pi.$$

Enfin en posant $t = e^{-x^2}$, $\mathrm{d}t = -2xe^{-x^2}\mathrm{d}x$ on obtient par parité

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{-\ln t}} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x} \times 2xe^{-x^2}\mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x = G.$$

On a donc finalement

$$\boxed{G = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}.}$$

L'interversion de l'intégrale généralisée $\int_0^1 \mathrm{d}t$ avec la limite $\lim_{\alpha\to 0}$ peut se justifier en utilisant les outils modernes de l'intégration (convergence monotone ou dominée). On verra en TD une méthode plus élémentaire mais pas si éloignée de l'approche de Laplace puisqu'elle repose aussi sur la comparaison avec les intégrales de Wallis.

Pages suivantes :

- extrait du *Mémoire sur la probabilité des causes par les événements* (1774), Œuvres complètes de Laplace, tome 8, pages 35–36 ;
- extrait du traité *Institutionum calculi integralis* (1768), première section, chapitre 8.

R. Vergnioux, Université de Caen, 2017

$$E = \frac{(p+q)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{pq}} \int 2e^{-\frac{(p+q)^2}{2pq}z^2} dz.$$

Soit $-\frac{(p+q)^2}{2pq}z^2 = \mathrm{l}\mu$, et l'on aura

$$\int 2e^{-\frac{(p+q)^2}{2pq}z^2} dz = -\frac{\sqrt{2pq}}{(p+q)^{\frac{3}{2}}} \int \frac{d\mu}{\sqrt{-\mathrm{l}\mu}};$$

le nombre μ peut ici recevoir tous les accroissements possibles depuis o jusqu'à 1, et, en supposant l'intégrale commencer lorsque $\mu = 1$, nous avons ici besoin de sa valeur lorsque $\mu = 0$. Voici maintenant comment on peut la déterminer; pour cela, nous ferons usage du théorème suivant. (*Voir* le *Calcul intégral* de M. Euler.) En supposant que l'intégrale commence lorsque $\mu = 0$ et finisse lorsque $\mu = 1$, on a

$$\int \frac{\mu^n d\mu}{\sqrt{1-\mu^{2i}}} \int \frac{\mu^{n+i} d\mu}{\sqrt{1-\mu^{2i}}} = \frac{1}{i(n+1)} \frac{\pi}{2},$$

quels que soient n et i. Supposons conséquemment $n = 0$ et i infiniment petit; nous aurons

$$\frac{1-\mu^{2i}}{2i} = -\mathrm{l}\mu,$$

car le numérateur et le dénominateur de cette quantité devenant nuls par la supposition de $i = 0$, si l'on différentie l'un et l'autre en regardant i seule comme variable, on aura

$$\frac{1-\mu^{2i}}{2i} = -\mathrm{l}\mu,$$

partant $1 - \mu^{2i} = -2i\,\mathrm{l}\mu$; on aura donc dans ces suppositions

$$\int \frac{\mu^n d\mu}{\sqrt{1-\mu^{2i}}} \int \frac{\mu^{n+i} d\mu}{\sqrt{1-\mu^{2i}}} = \int \frac{d\mu}{\sqrt{2i}\sqrt{-\mathrm{l}\mu}} \int \frac{d\mu}{\sqrt{2i}\sqrt{-\mathrm{l}\mu}} = \frac{1}{i}\frac{\pi}{2};$$

partant

$$\int \frac{d\mu}{\sqrt{-\mathrm{l}\mu}} = \sqrt{\pi},$$

en supposant l'intégrale commencer lorsque $\mu = 0$ et finir lorsque $\mu = 1$; mais comme, dans le cas précédent, cette intégrale commence lorsque $\mu = 1$ et finit lorsque $\mu = 0$, nous aurons

$$\int -\frac{d\mu}{\sqrt{-\mathrm{l}\mu}} = \sqrt{\pi}.$$

Donc

$$\int 2e^{-\frac{(p+q)^2}{2pq}z^2} dz = \frac{\sqrt{pq}\sqrt{2\pi}}{(p+q)^{\frac{3}{2}}},$$

CAPUT VIII.

DE
VALORIBUS INTEGRALIUM QUOS CERTIS TANTUM CASIBUS RECIPIUNT.

Problema 38.

330.

Integralis $\int \frac{x^m \partial x}{\sqrt{(1-xx)}}$ valorem, quem posito $x=1$ recipit, assignare, integrali scilicet ita determinato, ut evanescat posito $x=0$.

Solutio.

Pro casibus simplicissimis, quibus $m=0$ vel $m=1$, habemus posito $x=1$, post integrationem

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{\pi}{2} \text{ et } \int \frac{x\partial x}{\sqrt{(1-xx)}} = 1.$$

Deinde supra §. 119. vidimus esse in genere

$$\int \frac{x^{m+1}\partial x}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{m}{m+1}\int \frac{x^{m-1}\partial x}{\sqrt{(1-xx)}} - \frac{1}{m+1}x^m\sqrt{(1-xx)}:$$

casu ergo $x=1$ erit

$$\int \frac{x^{m+1}\partial x}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{m}{m+1}\int \frac{x^{m-1}\partial x}{\sqrt{(1-xx)}},$$

unde a simplicissimis ad majores exponentis m valores progrediendo obtinebimus:

**

$\int \frac{\partial x}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{\pi}{2}$	$\int \frac{x\partial x}{\sqrt{(1-xx)}} = 1$
$\int \frac{x^2\partial x}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$	$\int \frac{x^3\partial x}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{2}{3}$
$\int \frac{x^4\partial x}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{\pi}{2}$	$\int \frac{x^5\partial x}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{2.4}{3.5}$
$\int \frac{x^6\partial x}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{\pi}{2}$	$\int \frac{x^7\partial x}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{2.4.6}{3.5.7}$
$\int \frac{x^8\partial x}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\frac{\pi}{2}$	$\int \frac{x^9\partial x}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{2.4.6.8}{3.5.7.9}$
$\vdots$	$\vdots$
$\int \frac{x^{2n}\partial x}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots\ 2n}\cdot\frac{\pi}{2}$	$\int \frac{x^{2n+1}\partial x}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{2.4.6\ldots\ 2n}{3.5.7\ldots(2n+1)}$

Corollarium 1.

331. Integrale ergo $\int \frac{x^m\partial x}{\sqrt{(1-xx)}}$, posito $x=1$, algebraice exprimitur casibus, quibus exponens m est numerus integer impar; casibus autem, quibus est par, quadraturam circuli involvit; semper enim π designat peripheriam circuli, cujus diameter $=1$.

Corollarium 2.

332. Si binas postremas formulas in se multiplicemus prodit:

$$\int \frac{x^{2n}\partial x}{\sqrt{(1-xx)}}\cdot\int \frac{x^{2n+1}\partial x}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{1}{2n+1}\cdot\frac{\pi}{2}$$

posito scilicet $x=1$, quam veram esse patet, etiamsi n non sit numerus integer.

Corollarium 3.

333. Haec ergo aequalitas subsistet, si ponamus $x=z^\nu$, iisdem conditionibus, quia sumto $x=0$ vel $x=1$ fit $z=0$ vel $z=1$. Erit ergo

$$\nu\nu\int \frac{z^{2n\nu+\nu-1}\partial z}{\sqrt{(1-z^{2\nu})}}\cdot\int \frac{z^{2n\nu+2\nu-1}\partial z}{\sqrt{(1-z^{2\nu})}} = \frac{1}{2n+1}\cdot\frac{\pi}{2},$$

et posito $2n\nu+\nu-1=\mu$, fiet posito $z=1$

$$\int \frac{z^\mu\partial z}{\sqrt{(1-z^{2\nu})}}\cdot\int \frac{z^{\pi+\nu}\partial z}{\sqrt{(1-z^{2\nu})}} = \frac{1}{\nu(\mu+1)}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Scholion 1.

334. Quod tale productum binorum integralium exhiberi queat, eo magis est notatu dignum, quod aequalitas haec subsistit, etiamsi neutra formula neque algebraice neque per π exhiberi queat. Veluti si $\nu=2$ et $\mu=0$, fit

$$\int \frac{\partial z}{\sqrt{(1-z^4)}}\cdot\int \frac{zz\partial z}{\sqrt{(1-z^4)}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4},$$

similique modo:

$\nu=3,\ \mu=0$ fit $\int \frac{\partial z}{\sqrt{(1-z^6)}}\cdot\int \frac{z^3\partial z}{\sqrt{(1-z^6)}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}$;

$\nu=3,\ \mu=1$ fit $\int \frac{z\partial z}{\sqrt{(1-z^6)}}\cdot\int \frac{z^4\partial z}{\sqrt{(1-z^6)}} = \frac{1}{6}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{12}$;

$\nu=4,\ \mu=0$ fit $\int \frac{\partial z}{\sqrt{(1-z^8)}}\cdot\int \frac{z^4\partial z}{\sqrt{(1-z^8)}} = \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8}$;

$\nu=4,\ \mu=2$ fit $\int \frac{zz\partial z}{\sqrt{(1-z^8)}}\cdot\int \frac{z^6\partial z}{\sqrt{(1-z^8)}} = \frac{1}{12}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{24}$;

$\nu=5,\ \mu=0$ fit $\int \frac{\partial z}{\sqrt{(1-z^{10})}}\cdot\int \frac{z^5\partial z}{\sqrt{(1-z^{10})}} = \frac{1}{5}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{10}$;

$\nu=5,\ \mu=1$ fit $\int \frac{z\partial z}{\sqrt{(1-z^{10})}}\cdot\int \frac{z^6\partial z}{\sqrt{(1-z^{10})}} = \frac{1}{20}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{40}$;