Université de Caen – Normandie
UFR Droit et Sciences Politiques

Année 2018-2019, Licence 1 AES
Session 1, Semestre 2

ADM214T — Mathématiques
Examen Terminal

Durée : 2h. Tous les documents et calculatrices (autonomes, non communicantes) sont autorisées. Le sujet comporte quatre exercices indépendants, qui peuvent être traités dans l'ordre souhaité. Chaque étudiant·e doit porter son nom dans le coin supérieur droit de la copie et le cacher par collage.

Exercice 1. On considère l'équation $x^2 + 8x + 4m = 0$, d'inconnue x et de paramètre m.

a. On suppose, *dans cette question seulement*, que $m = 4$.
Résoudre l'équation dans ce cas. $x = -4$

b. Pour quelles valeurs de m l'équation admet-elle deux solutions distinctes ? $m < 4$

Exercice 2. On considère la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -3 & 8 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

a. Compléter la matrice des mineurs M associée à A :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & ? & ? \\ 1 & ? & -2 \\ -2 & -6 & ? \end{pmatrix}$$

On calculera les valeurs des 4 points d'interrogations, c'est-à-dire $m_{1,2}$, $m_{1,3}$, $m_{2,2}$ et $m_{3,3}$.

b. Calculer le déterminant de A. 1
La matrice A est-elle inversible ? Justifier la réponse.

c. Calculer la matrice complémentaire $\tilde{A}$, puis la matrice A^{-1}.

d. Résoudre le système linéaire suivant : $x = 3,\ y = -3,\ z = 1$

$$\begin{cases} -5x - 3y + 8z = 2 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ -4x - 2y + 5z = -1. \end{cases}$$

Exercice 3. On considère la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 6 \\ -3 & -6 & -7 \end{pmatrix}.$$

a. Calculer la matrice A^2. *On présentera le détail des calculs.* $\begin{pmatrix} 10 & 0 & 6 \\ 9 & 1 & 6 \\ -9 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

b. On donne le polynôme caractéristique de A : $P_A(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$. *Sans nouveau calcul, mais en justifiant la réponse*, donner le déterminant de A et la trace de la matrice complémentaire $\tilde{A}$.

c. Déterminer les valeurs propres de la matrice A. $-1,\ 1,\ 2$
On pourra remarquer que $r = 1$ est racine évidente du polynôme P_A.

d. Écrire le système d'équations permettant de déterminer les coefficients α, β, γ dans l'expression $A^6 = \alpha A^2 + \beta A + \gamma I$. *Il n'est pas nécessaire d'avoir réussi cette question pour traiter la suivante :*

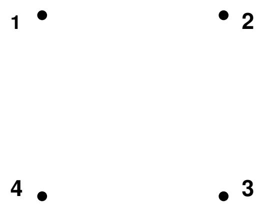
e. On admet que la solution du système précédent est $\alpha = 21$, $\beta = 0$ et $\gamma = -20$.
Calculer la matrice A^6. $\begin{pmatrix} 190 & 0 & 126 \\ 189 & 1 & 126 \\ -189 & 0 & -125 \end{pmatrix}$

Suite au verso

Exercice 4. On considère la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a. Tracer le graphe $\mathbb{G}$ dont A est la matrice d'adjacence, en plaçant les sommets comme ci-dessous :



On donne ci-dessous les matrices A^2, A^3, A^4 :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^4 = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 6 & 4 \\ 10 & 15 & 4 & 16 \\ 8 & 6 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

b. Combien y a-t-il de chemins de longueur 4 du sommet 2 vers le sommet 1 dans le graphe $\mathbb{G}$? *On expliquera d'où provient la réponse.*

c. Calculer les matrices $I + A$, $I + A + A^2$, $I + A + A^2 + A^3$.

d. Le graphe $\mathbb{G}$ est-il fortement connexe ? *On justifiera la réponse.*