Intégrales généralisées

Exercice 1. Étudier la convergence des intégrales des fonctions suivantes sur les intervalles précisés :

- $a : x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{x}^2$ entre 1 et $+\infty$,
- $b : x \mapsto \frac{(\ln x)^2}{\sqrt{x}}$ entre 1 et $+\infty$,
- $c : x \mapsto \frac{1}{x \ln x}$ entre 2 et $+\infty$,
- $d : x \mapsto \sqrt{x}\ln(x)$ entre 0 et 1,
- $e : x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{x}$ entre 0 et 1,
- $f : x \mapsto \frac{1}{x^2 \ln x}$ entre 0 et $\frac{1}{2}$,
- $g : x \mapsto \ln(2x)$ entre 0 et 1,
- $h : x \mapsto \frac{1}{(x-1)\sqrt{x-1}}$ entre 1 et 2,
- $i : x \mapsto \exp(-3x)$ entre 0 et $+\infty$,
- $j : x \mapsto \exp(-2\ln x)$ entre 1 et $+\infty$,
- $k : x \mapsto \frac{x}{(\ln x)^2}$ entre 0 et $+\infty$.

Exercice 2. Étudier la convergence des intégrales des fonctions suivantes sur les intervalles précisés :

- $a : x \mapsto \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x^3-1}}$ sur $[1, +\infty[$,
- $b : x \mapsto \frac{\ln x}{\sqrt{x^3+x^2+1}}$ sur $[1, +\infty[$,
- $c : x \mapsto \arctan e^{-x}$ sur $[0, +\infty[$,
- $d : x \mapsto \frac{\arctan x}{x \ln(1+x^2)}$ sur $[1, +\infty[$,
- $e : x \mapsto \sqrt{\ln(x+1)} - \sqrt{\ln x}$ sur $[1, +\infty[$,
- $f : x \mapsto \arccos(\frac{x-1}{x})$ sur $[1, +\infty[$,
- $g : x \mapsto x + 1 - \sqrt{x^2 + 2x}$ sur $[1, +\infty[$,
- $h : x \mapsto \frac{\cos x}{\sqrt{x+x^2}}$ sur $]0, 1]$,
- $i : x \mapsto \frac{1}{e^x - \cos x}$ sur $]0, 1]$,
- $j : x \mapsto \frac{\operatorname{ch} x - \cos x}{x^{5/2}}$ sur $]0, 1]$,
- $k : x \mapsto \frac{1}{1-\sqrt{x}}$ sur $[0, 1[$,
- $l : x \mapsto 1 + x\ln(\frac{x}{x+1})$ sur $]0, +\infty[$.

Exercice 3. Étudier la convergence des intégrales des fonctions suivantes sur les intervalles précisés :

- $a : x \mapsto \sqrt{-\ln x}$ sur $]0, 1]$,
- $b : x \mapsto x^2 \exp(-x)$ sur $[0, +\infty[$,
- $c : x \mapsto x(\sin x)e^{-x}$ sur $[0, +\infty[$,
- $d : x \mapsto \exp(-\sqrt{\ln x})$ sur $[1, +\infty[$,
- $e : x \mapsto x\exp(-\sqrt{x})$ sur $[0, +\infty[$,
- $f : x \mapsto \exp(-x \arctan x)$ sur $[0, +\infty[$,
- $g : x \mapsto \frac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}$ sur $[2, +\infty[$,
- $h : x \mapsto (\operatorname{ch}\sqrt{\ln x})^{-2}$ sur $[2, +\infty[$.

Exercice 4. Étudier la convergence des intégrales des fonctions suivantes sur les intervalles précisés :

- $a : x \mapsto \sin(x^2)e^{-2x}$ sur $[0, +\infty[$,
- $b : x \mapsto \frac{\cos x}{x\sqrt{x}}$ sur $[1, +\infty[$,
- $c : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}\sin(\frac{1}{x})$ sur $]0, 1]$,
- $d : x \mapsto \frac{1}{x}\sin(x)\sin(\frac{1}{x})$ sur $[1, +\infty[$,
- $e : x \mapsto \frac{\sin(1+x^2)}{1+x^2}$ sur $[0, +\infty[$,
- $f : x \mapsto \sin(\ln x)$ sur $]0, +\infty[$.

Exercice 5. Discuter, suivant la valeur du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergence des intégrales suivantes :

— $I = \int_0^{+\infty} x^\alpha \arctan(x)\mathrm{d}x$,
— $J = \int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^\alpha}\mathrm{d}x$,
— $K = \int_0^{+\infty} x^\alpha \ln(x + e^{\alpha x})\mathrm{d}x$.

Exercice 6. Calculer les intégrales suivantes, après avoir justifié leur convergence :

— $I = \int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x}} \mathrm{d}x$.
— $J = \int_0^{+\infty} x e^{-\sqrt{x}} \mathrm{d}x$.
— $K = \int_0^1 \frac{x \ln x}{(x^2+1)^2}$.

Exercice 7. Pour tout $a > 0$ on pose $I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{a^2+x^2}$.

a. Justifier l'existence de $I(a)$ pour tout $a > 0$.
b. En effectuant le changement de variable $x = 1/y$, montrer que $I(1) = 0$.
c. En effectuant le changement de variable $x = ay$, déterminer la valeur de $I(a)$ pour tout $a > 0$.

Exercice 8. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on considère les intégrales

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^n)} \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{+\infty} \frac{x^n \mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^n)}.$$

a. Justifier l'existence de I_n et J_n pour tout n.
b. Montrer que $I_n + J_n = \frac{\pi}{2}$ pour tout n.
c. À l'aide du changement de variable $x = 1/y$, déterminer les valeurs de I_n et J_n pour tout n.

Exercice 9. On cherche à calculer l'*intégrale de Gauss* $G = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \mathrm{d}x$.

a. On rappelle qu'on a $e^t \geq 1 + t$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\forall u \in [0, n] \quad \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n \leq e^{-u} \quad \text{et} \quad \forall u \geq 0 \quad e^{-u} \leq \left(1 + \frac{u}{n}\right)^{-n}.$$

b. Démontrer qu'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \mathrm{d}x \leq G \leq \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}x.$$

On appelle I_n, J_n les intégrales aux membres de gauche et de droite.

c. Grâce à des changements de variables appropriés, relier I_n et J_n aux intégrales de Wallis $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^n \mathrm{d}x$.
d. On rappelle que $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$. Montrer que $G = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 10. *(Contrôle intermédiaire, 2017)* On considère les fonctions

$$f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, \; x \mapsto \sin(x^2) \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \quad \text{et} \quad g :]1, +\infty[\to \mathbb{R}, \; x \mapsto \frac{\ln(\ln(x))}{x^2}.$$

a. Déterminer un equivalent simple de $f(x)$, puis la limite de $f(x)$, quand $x \to 0$.
b. L'intégrale de f converge-t-elle en 0 ? en $+\infty$?
c. Montrer que $\frac{\ln t}{e^t} = o(\frac{1}{t^2})$ quand $t \to +\infty$.
d. L'intégrale de g converge-t-elle en 1 ? en $+\infty$?
On pourra procéder à un changement de variable.

Exercice 11. *(Contrôle intermédiaire, 2017)*

a. Montrer que l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} \mathrm{d}t$ converge. Quelle est la nature de $I_1 = \int_0^1 \frac{t}{\ln t} \mathrm{d}t$ et $I_2 = \int_0^1 \frac{1}{\ln t} \mathrm{d}t$?
b. Montrer que pout tout $x \in]0, 1[$ on a $\int_0^x \frac{t}{\ln t} \mathrm{d}t = \int_0^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$.
c. En déduire que $\lim_{x \to 1} \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} = I$.
d. Montrer grâce à un DL que la fonction $g : x \mapsto \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}$ définie sur $]0, 1[$ a une limite en $x = 1$.
e. En déduire que $\lim_{x \to 1} \int_x^{x^2} g(t) \mathrm{d}t = 0$. *On pourra écrire* $\int_x^{x^2} g(t) \mathrm{d}t = \int_{\frac{1}{2}}^{x^2} g(t) \mathrm{d}t - \int_{\frac{1}{2}}^{x} g(t) \mathrm{d}t$.
f. Pour $x \in]0, 1[$, calculer $\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{t-1}$.
g. En déduire la valeur de I.