Université de Caen
UFR Sciences
L2 Maths

2e semestre 2020-2021
Mathématiques
Analyse 4

Contrôle Continu n°1

Durée : 2h. Les documents, calculatrices, téléphones et autres objets électroniques sont interdits.

Les réponses doivent être justifiées : une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte. En particulier les hypothèses des théorèmes utilisés doivent être mentionnées et vérifiées. La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction seront prises en compte à la correction.

Les quatre exercices sont indépendants.

Exercice 1. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$a_n = 2^{-n}\sqrt{n!}, \qquad b_n = \frac{\sqrt{n} + e^{-n}}{(n+2)^2}, \qquad c_n = \frac{\cos(n^2)}{n^2 + \sqrt{n}}.$$

Déterminer la nature des séries $\sum a_n$, $\sum b_n$ et $\sum c_n$. On justifiera précisément les réponses.

Exercice 2. On pose $u_n = (-1)^n \dfrac{\ln(n)}{n}$ et $v_n = \dfrac{(-1)^n}{n} \ln(n + (-1)^n)$ pour tout $n \geq 3$.

a. Montrer que la série $\sum u_n$ converge.
   Il peut être utile de vérifier que la fonction $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$ est décroissante sur $[3, +\infty[$.

b. La série $\sum u_n$ est-elle absolument convergente ?
   On justifiera la réponse **sans** *utiliser de résultat sur les séries de Bertrand. On pourra par exemple partir de l'inégalité $n \geq e$, valable pour tout $n \geq 3$.*

c. Montrer que $v_n \sim u_n$, puis déterminer un « équivalent simple » de $v_n - u_n$ quand $n \to \infty$.

d. Déterminer la nature de la série $\sum v_n$.

Exercice 3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ et

$$v_n = u_{n^2} + u_{n^2+1} + u_{n^2+2} + \cdots + u_{(n+1)^2} = \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2} u_k.$$

a. On note $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ la fonction $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.
   Montrer que pour tout $k \geq 2$ on a $\int_k^{k+1} f(t)\mathrm{d}t \leq u_k \leq \int_{k-1}^k f(t)\mathrm{d}t$.

b. En déduire que pour tout $n \geq 2$ on a $2\sqrt{n^2+2n+2} - 2n \leq v_n \leq 2(n+1) - 2\sqrt{n^2-1}$.

c. Établir les développements asymptotiques $\sqrt{n^2+2n+2} = n + 1 + o(1)$ et $\sqrt{n^2-1} = n + o(1)$ quand $n \to +\infty$. *On rappelle le développement limité $\sqrt{1+t} = 1 + \frac{1}{2}t + o(t)$ quand $t \to 0$.*

d. Montrer que la suite $(v_n)_n$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 4. Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs. On suppose que $\sum u_n$ diverge.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$.

a. Quel est le sens de variation de la suite $(S_n)_n$? Justifier.

b. Montrer que la suite $(S_n^{-1})_n$ tend vers 0. En déduire que la série $\sum (S_n^{-1} - S_{n+1}^{-1})$ converge, en étudiant la suite de ses sommes partielles.

c. Montrer que $\frac{1}{S_n} - \frac{1}{S_{n+1}} \geq \frac{u_{n+1}}{S_{n+1}^2}$. *On pourra commencer par réduire au même dénominateur.*

d. Montrer que la série $\sum \frac{u_n}{S_n^2}$ converge.