Convexité et Dualité

Exercice 1. Soit E un EVN, $F \subset E$ un sous-espace vectoriel, et G un EVN de dimension finie.

a. Montrer que toute application linéaire continue $S \in \mathcal{L}(F, G)$ peut se prolonger en un application linéaire continue $T \in \mathcal{L}(E, G)$.

b. On suppose F de dimension finie.

(i) Montrer que F est fermé.

(ii) Montrer qu'il existe $T \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $T(x) = x$ pour tout $x \in F$.

(iii) Monter que F admet un supplémentaire fermé.

Exercice 2. On considère l'espace $E = \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ et on note $\|\cdot\|_\infty$ la norme du sup sur E.
On définit un opérateur $S : E \to E$ en posant $S(x) = (x_{k+1})_k$ si $x = (x_k)_k \in E$. Autrement dit

$$S(x_0, x_1, x_2, \ldots) = (x_1, x_2, x_3, \ldots).$$

On note $I = \mathrm{Im}(S - \mathrm{Id}) \subset E$. On considère également la suite constante $e = (1, 1, 1, \ldots)$, et $C = \mathrm{Vect}\{e\}$ le sous-espace des suites constantes.

a. Montrer que I et C sont en somme directe.

On peut donc définir une forme linéaire $L_0 : I + C \to \mathbb{R}$ en posant $L_0((S - \mathrm{Id})(x) + \lambda e) = \lambda$ pour tous $x \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

b. On considère la forme linéaire $c_n \in E^*$ donnée par $c_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} x_k$ si $x = (x_k)_k$.

(i) Montrer que pour $z \in I + C$ on a $\lim_{n\to\infty} c_n(z) = L_0(z)$.

(ii) En déduire que la forme linéaire L_0 est continue.

c. Montrer qu'il existe une forme linéaire continue $L \in E^*$ telle que $\|L\| = 1$, $L(e) = 1$ et $L \circ S = L$.

Dans la suite on fixe une forme linéaire L vérifiant ces 3 propriétés.
Remarque : on peut montrer qu'il existe une infinité de formes linéaires L convenables.

d. (i) Soit $x = (x_k)_k$, $y = (y_k)_k$ deux suites dans E.
On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x_k = y_k$ pour tout $k \geq n$.
Montrer que $L(x) = L(y)$. Quel résultat obtient-on dans le cas où y est la suite nulle ?

(ii) Montrer que $L(x) = 0$ pour toute suite $x \in E$ qui converge vers 0.
En déduire que si la suite $x = (x_k)_k \in E$ converge, on a $L(x) = \lim_{k\to\infty} x_k$.

e. On considère $x = (1, 0, 1, 0, 1, \ldots) \in E$. Calculer $L(x)$. *On pourra utiliser $S(x)$.*
A-t-on $L(xy) = L(x)L(y)$ pour toutes les suites x, $y \in E$?

f. Soit $x = (x_k)_k \in E$ telle que $x_k \geq 0$ pour tout x. Montrer qu'on a $L(x) \geq 0$.
Indication. On pourra observer que le vecteur $y = \|x\|_\infty e - x$ vérifie alors $\|y\|_\infty \leq \|x\|_\infty$.

g. Pour toute partie $A \subset \mathbb{N}$ on pose $m(A) = L(\chi_A)$, où $\chi_A : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ est la fonction caractéristique de A (considérée comme une suite).

(i) Montrer qu'on a $m(A) \geq 0$ pour toute partie $A \subset \mathbb{N}$, et $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$ si $A \cap B = \emptyset$. Combien valent $m(\emptyset)$ et $m(\mathbb{N})$?

(ii) On note $A + k = \{a + k \mid a \in A\}$, pour $A \subset \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $m(A + k) = m(A)$.

(iii) L'application $m : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ est-elle une mesure ?

h. Question subsidiaire. Montrer que pour toute suite $x = (x_k)_k \in E$ on a $\liminf x_k \leq L(x) \leq \limsup x_k$.

Exercice 3. Soit E un EVN et $C \subset E$ une partie convexe fermée. On considère

$$A = \{(\varphi, m) \in E^* \times \mathbb{R} \mid m \leq \inf \varphi(C)\}.$$

Montrer que $C = \bigcap_{(\varphi,m)\in A} \{x \in E \mid \varphi(x) \geq m\}$.
Ainsi tout convexe fermé est une intersection de demi-espaces fermés.

Exercice 4. *(Examen 2017)*
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. On munit $E \times E$ de la norme $\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|$.
Soit $K \subset E$ un compact convexe non vide.
Soit $f : K \to K$ une application continue. On suppose de plus que f est *affine*, c'est-à-dire que pour tous x, $x' \in K$ et $\lambda \in [0, 1]$ on a $\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(x') = f(\lambda x + (1 - \lambda)x')$.
On note $G(f) \subset K \times K$ le graphe de f, et on considère également $D = \{(x, x) \mid x \in K\} \subset K \times K$.
Le but de l'exercice est de montrer que f admet un point fixe, et on procède par l'absurde. On suppose donc que f n'admet pas de point fixe.

a. Montrer que $G(f)$ et D sont des convexes compacts de $E \times E$.
On notera que E n'est pas nécessairement de dimension finie.
b. Montrer qu'il existe une forme linéaire continue $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ et α, $\beta \in \mathbb{R}$ tels que $\varphi(x, x) \leq \alpha < \beta \leq \varphi(x', f(x'))$ pour tous x, $x' \in K$.
c. Montrer qu'il existe deux formes linéaires continues φ_1, $\varphi_2 : E \to \mathbb{R}$ telles que $\varphi(x_1, x_2) = \varphi_1(x_1) + \varphi_2(x_2)$ pour tous x_1, $x_2 \in E$.
d. Montrer que pour tout $x \in K$ on a $\varphi_2(f(x)) - \varphi_2(x) \geq \beta - \alpha$.
Montrer que pour tout $x \in K$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $\varphi_2(f^n(x)) - \varphi_2(x) \geq n(\beta - \alpha)$.
e. Conclure.