Université de Caen
UFR Sciences
L2 Maths

2e semestre 2022-2023
Mathématiques
Analyse

Séries de fonctions

Exercice 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ en posant $f_n(x) = \dfrac{\cos(nx)}{n^2 + x^2}$.

a. Montrer que la série numérique $(\sum_n f_n(1))$ converge.

b. Montrer que la série de fonctions $(\sum_n f_n)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

c. Montrer que la série de fonctions $(\sum_n f_n)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

d. Montrer que la fonction somme $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est continue sur $\mathbb{R}$.

e. Montrer que $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = 0$.

Exercice 2. On considère la série de fonctions $(\sum_{n \geq 1} f_n)$ avec $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{\sin(nx)}{n^3}$.

a. Montrer la convergence simple de la série sur $\mathbb{R}$. On note $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b. Montrer que la série $(\sum_{n \geq 1} f_n)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. En déduire que g est continue.

c. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $f_n(x) = xe^{-nx}$.

a. La série de fonctions $(\sum_n f_n)$ converge-t-elle simplement sur $\mathbb{R}_+$?

b. Converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}_+$? et sur $[2, +\infty[$? *On procédera à une étude de fonction.*

c. Calculer $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.
Calculer les restes $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)$ pour $x = 1/n$.

d. La série de fonctions $(\sum_n f_n)$ converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}_+$?

Exercice 4. Pour tout $n \geq 1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \frac{1}{n} \arctan \frac{x}{n}$.

a. Soit a un réel strictement positif. Montrer $(\sum_n f_n)$ converge normalement sur $[-a, a]$.

b. Soit $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ la fonction somme.
   (i) Montrer f est continue sur $\mathbb{R}$.
   (ii) Montrer f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5. On considère la série de fonctions $(\sum_{n \geq 1} f_n)$ avec $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{n + x^3}{x + n^3}$.

a. Montrer la convergence simple de la série sur $\mathbb{R}_+$. On note $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

b. La série $(\sum_{n \geq 1} f_n)$ converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}_+$?

c. On fixe $a > 0$.
   (i) Montrer que pour tout $x \in [0, a]$ on a $|f_n(x)| \leq (n + a^3)/n^3$.
   (ii) Montrer que la série $(\sum_{n \geq 1} f_n)$ converge normalement sur $[0, a]$.

d. Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 6. Pour tout $x \geq 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n^2} \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

a. Montrer que la série $(\sum f_n)$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}_+$.

b. La série $(\sum f_n')$ converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}_+$? et sur $[a, +\infty[$, avec $a > 0$?
Montrer que g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$. Déterminer $\lim_{x \to \infty} g(x)$ et $\lim_{x \to \infty} g'(x)$.

c. Calculer $g''(x)$, puis $g'(x)$, pour tout $x > 0$.

d. Montrer que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = -\int_0^{+\infty} \ln(1 - e^{-t}) \mathrm{d}t.$$

Exercice 7. On considère la série de fonctions $(\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n)$ avec $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{(-1)^n}{n+x}$.

a. Montrer que cette série de fonctions converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.
   On note $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

b. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$.

c. La série $(\sum f_n)$ converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}_+$? sur $[a, b]$ avec $0 < a < b < +\infty$?

d. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

e. Montrer que $\lim_{+\infty} f = 0$.

Exercice 8.

a. Montrer que la série de fonctions de terme général $f_n(x) = \dfrac{1}{n(1+nx)}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. Montrer que la fonction $S = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ est positive et décroissante.

c. Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et déterminer $\lim_{x\to+\infty} S(x)$.

d. Soit $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$. Montrer que pour tout $n \geq 1$ et pour tout $x > 0$, $S_n(x) \leq S(x)$.

e. Montrer que $\lim_{x\to 0} S(x) = +\infty$.

Exercice 9. Pour tout $x > 1$ on pose

$$\zeta(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x}, \quad f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} \quad \text{et} \quad d_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^x} - \int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x}.$$

a. Justifier le fait que $\zeta(x)$ et $f(x)$ sont bien définies pour $x > 1$. Calculer $f(x)$.
   Montrer que la suite de fonction $(d_n)_n$ converge simplement sur $]1, +\infty[$ vers une fonction d à déterminer.

b. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $x > 1$ on a

$$0 \leq \frac{1}{k^x} - \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} \leq \frac{1}{k^x} - \frac{1}{(k+1)^x}.$$

   En déduire un encadrement de $d(x) - d_n(x)$.

c. Montrer que la suite de fonctions $(d_n)_n$ converge uniformément vers d.

d. Soit $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ les sommes partielles de la série harmonique.
   On rappelle qu'il existe une constante $\gamma \in \mathbb{R}$ telle que $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$.
   Montrer qu'on a $\zeta(x) = \frac{1}{x-1} + \gamma + o(1)$ lorsque $x \to 1$.

Exercice 10. Pour $z \in \mathbb{C}$ et $x > 0$ on rappele que $x^z = \exp(z\ln(x)) \in \mathbb{C}$. On considère les séries de fonctions

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} \quad \text{et} \quad \eta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^z}.$$

a. Montrer que $|x^z| = x^{\mathrm{Re}(z)}$. En déduire que ζ et η sont bien définies et continues sur $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 1\}$.

b. On pose $g_n(z) = (-1)^{n+1}/n^z$.
   (i) Montrer qu'on a $g_{2n-1}(z) + g_{2n}(z) = \frac{1-(1-\frac{1}{2n})^z}{(2n-1)^z}$.
   En déduire un équivalent simple de $g_{2n-1}(z) + g_{2n}(z)$ lorsque $n \to \infty$.
   On admet que le $DL_1(0)$ de $(1+t)^\alpha$ reste valable pour $\alpha \in \mathbb{C}$.
   (ii) Montrer que $(\sum_{n\geq 1} g_{2n-1}(z) + g_{2n}(z))$ converge absolument si $\mathrm{Re}(z) > 0$.
   (iii) En déduire que η est bien définie sur $K = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$.

c. (i) Lorsque $\mathrm{Re}(z) > 1$, déterminer une relation entre $\zeta(z)$ et $\eta(z)$.
   On pourra observer les simplifications dans la différence $\zeta(s) - \eta(z)$.
   (ii) Déterminer l'ensemble $Z = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 - 2^{1-z} = 0\}$.

On étend ζ à $K' = K \setminus Z$ grâce à la relation entre ζ et η. C'est en fait l'unique manière de prolonger ζ en une fonction dérivable *au sens complexe* sur K'. On peut alors poser la fameuse question : si z est un zéro de ζ dans la bande $0 < \mathrm{Re}(z) < 1$, a-t-on nécessairement $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}$?