

CONTRÔLE CONTINU N°1

Durée : 2h. Les documents, calculatrices, téléphones et autres objets électroniques sont interdits. Toute forme de communication avec d'autres étudiants est interdite. Le barème est indicatif.

Les réponses doivent être justifiées avec rigueur et précision. En particulier les hypothèses des théorèmes utilisés doivent être mentionnées et vérifiées. Les manipulations d'inégalités, équivalents, limites, ..., doivent être expliquées en détail. Les copies doivent être lisibles et présentées proprement, l'utilisation du brouillon est conseillée.

Question de cours. (1 point) Énoncer le théorème de comparaison par équivalents pour les séries numériques, avec comparaison des restes ou des sommes partielles.

Exercice 1. (8 points)

- a. Déterminer la nature des séries numériques $(\sum_{n \geq 1} a_n)$, $(\sum_{n \geq 1} b_n)$, $(\sum_{n \geq 2} c_n)$, $(\sum_{n \geq 1} d_n)$ données par les termes généraux suivants :

$$a_n = n^2 \sin\left(\frac{1}{n}\right), \quad b_n = \frac{3^n}{(2n)!}, \quad c_n = \frac{(-1)^n}{\ln(n)}, \quad d_n = (-1)^n \cos(n) 2^{-n}.$$

On attend des justifications précises reposant sur des résultats du cours.

- b. On pose $u_n = \frac{\ln(n + e^n)}{n^2 \sqrt{n} + \ln(n)}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
- (i) Déterminer un équivalent simple de la suite $(u_n)_n$. *On justifiera la validité de l'équivalent trouvé.*
- (ii) Déterminer la nature de la série $(\sum u_n)$.

Exercice 2. (4 points) On considère la série numérique $(\sum_{n \geq 1} v_n)$ avec $v_n = \frac{(-1)^n}{n + \cos n}$.

- a. La série $(\sum v_n)$ converge-t-elle absolument ? Justifier la réponse.
- b. Montrer qu'on a $v_n = \frac{(-1)^n}{n} - \frac{(-1)^n \cos(n)}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
- c. En déduire la nature de la série $(\sum v_n)$.

Exercice 3. (4 points)

On définit une suite $(u_n)_n$ par la donnée de $u_0 > 0$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$.

- a. On admet que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$. En déduire que $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_{n+1}^2 - u_n^2) = 2$.

On pose $v_n = u_{n+1}^2 - u_n^2$ et on note $S_n = \sum_{k=0}^n v_k$.

- b. Montrer que $S_n \sim 2n$.
- c. En déduire que $u_n \sim \sqrt{2n}$.

Exercice 4. (4 points)

Soit $(\sum_{n \geq 0} u_n)$ une série à termes *strictement* positifs. On note $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ et on pose $v_n = \frac{u_n}{S_n}$.

On suppose que la série $(\sum v_n)$ converge.

- a. Montrer qu'on a $-\ln(1 - v_n) \sim v_n$.
- b. En déduire que la série $(\sum \ln(1 - v_n))$ converge.
- c. Montrer qu'on a $\ln(1 - v_n) = \ln(S_{n-1}) - \ln(S_n)$ pour tout $n \geq 1$.
- d. À l'aide des questions précédentes, montrer que la série $(\sum u_n)$ converge.