

CONTRÔLE CONTINU N°2

Durée : 2h30. Les documents, calculatrices, téléphones et autres objets électroniques sont interdits. Toute forme de communication avec d'autres étudiants est interdite. Le barème est indicatif.

Les réponses doivent être justifiées avec rigueur et précision. En particulier les hypothèses des théorèmes utilisés doivent être mentionnées et vérifiées. Les manipulations d'inégalités, équivalents, limites, ..., doivent être expliquées en détail. Les copies doivent être lisibles et présentées proprement, l'utilisation du brouillon est conseillée.

Question de cours. (1 point)

Énoncer le théorème de comparaison par « petit o » pour les intégrales généralisées.

Exercice 1. (8 points)

- (i) Déterminer la nature de la série $(\sum_{n \geq 1} v_n)$ où $v_n = \frac{e^{3n}(n!)^3}{(3n)!}$.
- (ii) Déterminer la nature de la série $(\sum_{n \geq 1} u_n)$ où $u_n = e^{1/n} + e^{-1/n} - 2$.
- (iii) Étudier la convergence de l'intégrale de $f : t \mapsto \frac{\sqrt{t} + t}{t^2 + t^5}$ sur $]0, 1]$.
- (iv) Étudier la convergence de l'intégrale de $g : t \mapsto \sin(1/t^2) \ln(t)$ sur $]0, +\infty[$.
- (i) Montrer que l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \cos(t)e^{-t} dt$ converge.
- (ii) Calculer I . On peut par exemple procéder à deux intégrations par parties.
- (iii) Montrer que l'intégrale $J = \int_0^1 \cos(\ln x) dx$ converge et calculer sa valeur.

Exercice 2. (4 points) On pose $f(t) = \ln\left(\frac{t+1}{t}\right)$ pour tout $t > 0$, et $g(t) = f(t) - f(t-1)$ pour tout $t > 1$.

- L'intégrale de f converge-t-elle en $+\infty$?
Montrer que l'intégrale de g converge en $+\infty$.
- Montrer que $\int_2^{+\infty} g(t) dt = -\int_1^2 f(t) dt + \lim_{x \rightarrow \infty} \int_{x-1}^x f(t) dt$.
- Montrer que pour $0 < x-1 < t$ on a $0 < f(t) < f(x-1)$. En déduire que $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_{x-1}^x f(t) dt = 0$.
- À l'aide des questions précédentes, montrer que

$$\int_2^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{t^2}\right) dt = -\int_1^2 \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right) dt.$$

Exercice 3. (4 points) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $T_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

- Montrer que pour tout $k \geq 2$ on a $\int_k^{k+1} \frac{dt}{\sqrt{t}} \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{\sqrt{t}}$.
- En déduire qu'on a $2[\sqrt{t}]_{n+1}^{2n+1} \leq T_n \leq 2[\sqrt{t}]_n^{2n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- Montrer que T_n admet un équivalent de la forme $T_n \sim \alpha\sqrt{n}$, avec $\alpha > 0$ à déterminer.
- Montrer sans utiliser les questions précédentes que $T_n \geq \sqrt{n}/\sqrt{2}$ pour tout n .

Exercice 4. (4 points) On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme et de la distance euclidiennes canoniques.

- (i) Montrer soigneusement que $f : (x, y) \mapsto \sin(x) - \cos(y)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.
- (ii) Montrer que $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sin(x) \leq \cos(y)\}$ est fermé dans $\mathbb{R}^2$.
- On considère $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x^2 - 1 \text{ et } y \leq x + 1\}$.
Représenter A graphiquement.
Montrer que A n'est ni ouvert ni fermé dans $\mathbb{R}^2$.