

ÉPREUVE DE SESSION 2

Durée : 2h. Les documents, calculatrices, téléphones et autres objets électroniques sont interdits. Toute forme de communication est interdite. Le barème est indicatif.

Les réponses doivent être justifiées avec rigueur et précision. En particulier les hypothèses des théorèmes utilisés doivent être mentionnées et vérifiées. Les manipulations d'inégalités, équivalents, limites, ..., doivent être expliquées en détail. Les copies doivent être lisibles et présentées proprement, l'utilisation du brouillon est conseillée.

Exercice 1. (11 points)

- a. (i) Déterminer la nature de la série $(\sum_{n \geq 1} v_n)$ où $v_n = \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!}$.
(ii) Étudier la convergence de l'intégrale de $f : t \mapsto \frac{t + t^2}{t\sqrt{t} + t^3}$ sur $]0, 1]$.
(iii) Étudier la convergence de l'intégrale de $g : t \mapsto \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}$ sur $]2, +\infty[$.
- b. On pose $w_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
(i) Déterminer un équivalent de $(|w_n|)_n$. La série $(\sum_{n \in \mathbb{N}^*} w_n)$ converge-t-elle absolument ?
(ii) À l'aide du DL₂ de $\ln(1+x)$, étudier la convergence de la série $(\sum_{n \in \mathbb{N}^*} w_n)$.
- c. (i) Montrer soigneusement que l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt$ converge.
(ii) Calculer I .
(iii) Montrer que l'intégrale $J = \int_0^{+\infty} \sqrt{x} e^{-\sqrt{x}} dx$ converge et calculer sa valeur.

Exercice 2. (5 points)

On définit une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en posant $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- a. Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.
On rappelle qu'on a $0 \leq \ln(1+x) \leq x$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.
- b. On pose $v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la série $(\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n)$ diverge.
- c. Montrer qu'on a $\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \sim \frac{1}{2}$ quand $x \rightarrow 0$.
- d. On note $S_n = \sum_{k=0}^n v_k$. À l'aide de la question précédente, montrer que $S_n \sim \frac{n}{2}$.
- e. En déduire un équivalent de la suite $(u_n)_n$.

Exercice 3. (4 points)

On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme et de la distance euclidiennes canoniques.

- a. (i) Montrer soigneusement que $f : (x, y) \mapsto e^x - x^2 y$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.
(ii) Montrer que $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid e^x \leq x^2 y\}$ est fermé dans $\mathbb{R}^2$.
- b. On considère $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4 \text{ et } x + y \leq 1\}$.
Représenter A graphiquement.
Montrer que A n'est ni ouvert ni fermé dans $\mathbb{R}^2$.