

## CONTRÔLE CONTINU N°1

Durée : 2h30. Les documents, calculatrices, téléphones et autres objets électroniques sont interdits. Toute forme de communication avec d'autres étudiants est interdite. Le barème est indicatif.

Les réponses doivent être justifiées avec rigueur et précision. En particulier les hypothèses des théorèmes utilisés doivent être mentionnées et vérifiées. Les copies doivent être lisibles et présentées proprement, l'utilisation du brouillon est conseillée.

### Questions de cours. (4 points)

- a. Soit  $D_n : t \mapsto \sum_{k=-n}^n e^{ikt}$  le noyau de Dirichlet. Montrer que pour tout  $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$  on a

$$D_n(t) = \frac{\sin((n + \frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{1}{2}t)}.$$

- b. Soit  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une base hilbertienne dénombrable d'un espace de Hilbert  $H$ . Montrer que pour tout  $x \in H$  on a  $x = \sum_{n=0}^{\infty} (e_n | x) e_n$ , où la série converge dans  $H$ .

### Exercice 1. (9 points)

On considère la fonction  $2\pi$ -périodique  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par la formule  $f(t) = |t|$  pour tout  $t \in [-\pi, \pi[$ .

- Calculer les coefficients de Fourier trigonométriques  $a_0(f)$ ,  $a_n(f)$ ,  $b_n(f)$ . On pourra distinguer selon la parité de  $n$ .
  - Montrer que la série de Fourier de  $f$  converge vers  $f$  en tout point  $t \in \mathbb{R}$ .
  - En déduire la valeur de  $\sum_{p=0}^{\infty} 1/(2p+1)^2$ .
  - On note  $c_k(f)$  les coefficients de Fourier exponentiels de  $f$ .  
Montrer qu'on a  $c_k(f) = \frac{1}{2} a_{|k|}(f)$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}^*$ , sans calculer  $c_k(f)$ .
- On souhaite étudier l'équation fonctionnelle  $(E) \quad 2y(t+1) - y(t-1) = f(t)$ , c'est-à-dire trouver les fonctions  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telles que l'équation  $(E)$  soit vérifiée pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .
  - Soit  $g \in \mathcal{L}_{2\pi}^1$ . On pose  $g_+(t) = g(t+1)$  et  $g_-(t) = g(t-1)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .  
Calculer les coefficients de Fourier  $c_k(g_+)$ ,  $c_k(g_-)$  en fonction de  $c_k(g)$ , pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ .
  - Soit  $g$  une solution de  $(E)$  dans  $\mathcal{L}_{2\pi}^1$ .  
Calculer les coefficients de Fourier  $c_k(g)$ , pour  $k \neq 0$ , en fonction des coefficients  $c_k(f)$ .
  - Montrer que  $(E)$  admet une unique solution  $g$  continue et  $2\pi$ -périodique.  
*On ne demande pas de calculer cette solution.*
  - L'équation fonctionnelle  $(E)$  admet-elle des solutions non  $2\pi$ -périodiques ?

### Exercice 2. (9 points)

Soit  $E = \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{C})$ . Pour  $f, g \in E$  on pose  $(f | g) = \int_{-1}^1 \overline{f(t)} g(t) |t| dt$ .

- Montrer que cela définit un produit scalaire hermitien sur  $E$ .
- Montrer que pour toute fonction  $g \in E$  on a  $\left( \int_{-1}^1 |tg(t)| dt \right)^2 \leq \int_{-1}^1 |tg(t)|^2 dt$ .
  - Soit  $f \in E$  une fonction paire, et  $g \in E$  une fonction impaire.  
Montrer que  $\int_{-1}^1 |t(f(t) + g(t))|^2 dt = \int_{-1}^1 |tf(t)|^2 dt + \int_{-1}^1 |tg(t)|^2 dt$ .
- On note  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la famille de polynômes obtenue par orthonormalisation de la famille  $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$  relativement au produit scalaire de  $E$ .
  - Calculer  $P_0, P_1, P_2, P_3$ .  
On fixe  $n \in \mathbb{N}$ . On note  $a_1, a_2, \dots, a_p$  les racines d'ordre impair de  $P_n$  dans  $[-1, 1]$  et on pose  $Q = (X - a_1)(X - a_2) \cdots (X - a_p)$ .
  - Montrer que  $QP_n$  est de signe constant sur  $[-1, 1]$ .
  - En procédant par l'absurde, en déduire que  $p \geq n$ .