

CONTRÔLE CONTINU N°2

Durée : 3h. Les documents, calculatrices, téléphones et autres objets électroniques sont interdits. Toute forme de communication avec d'autres étudiants est interdite. Le barème est indicatif.

Les réponses doivent être justifiées avec rigueur et précision. En particulier les hypothèses des théorèmes utilisés doivent être mentionnées et vérifiées. Les copies doivent être lisibles et présentées proprement, l'utilisation du brouillon est conseillée.

Questions de cours. (4 points)

Soit C un convexe complet non vide d'un espace pré-hilbertien H . Montrer que pour tout $x \in H$ il existe un unique $y \in C$ tel que $d(x, y) = d(x, C)$. On admet l'identité du parallélogramme.

Exercice 1. (6 points) On considère la fonction 2π -périodique sur $\mathbb{R}$ donnée par

$$f(t) = \begin{cases} \pi - t & \text{si } t \in]0, \pi], \\ 0 & \text{si } t = 0, \\ -\pi - t & \text{si } t \in]-\pi, 0[. \end{cases}$$

- Représenter graphiquement f . Est-elle continue par morceaux ? Justifier.
- Calculer les coefficients de Fourier trigonométriques de f .
- En déduire que la série de fonctions $(\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\sin(nt)}{n})$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa somme. Converge-t-elle uniformément ? Converge-t-elle dans $L^2([-\pi, \pi])$?
- Calculer les sommes suivantes à l'aide de la série de Fourier de f :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Exercice 2. (6 points)

On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est à croissance modérée s'il existe $n \in \mathbb{N}$ telle que $f(t) = o(t^n)$ en $+\infty$ et $-\infty$. On note E l'espace des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continues et à croissance modérée. On identifie $\mathbb{C}[X]$ à un sous-espace de E et on note $\mathbb{C}[X]_n = \{P \in \mathbb{C}[X] \mid \deg(P) \leq n\}$. Pour $f, g \in E$ on pose

$$(f \mid g) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(t)} g(t) e^{-t^2} dt. \quad (1)$$

- Montrer que pour $f, g \in E$ l'intégrale (1) converge.
Montrer que la formule (1) définit un produit scalaire hermitien sur E .
- On considère les intégrales $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} t^{2n} e^{-t^2} dt$. On rappelle que $I_0 = \sqrt{\pi}$ (intégrale de Gauss).
Montrer qu'on a $I_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.
Pour la suite de l'exercice on admet les valeurs $I_2 = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$, $I_3 = \frac{15}{8}\sqrt{\pi}$.
- Orthonormaliser la famille libre $(1, X, X^2)$ relativement au produit scalaire (1).
- Déterminer le projeté orthogonal de X^3 sur le sous-espace $\mathbb{C}[X]_2 \subset E$.
En déduire la distance $d(X^3, \mathbb{C}[X]_2)$ dans E .

Exercice 3. (5 points) On se place dans l'espace de Hilbert $H = L^2_{2\pi}$ des classes de fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 2π -périodiques, mesurables et telles que $|f|^2$ est intégrable sur $[0, 2\pi]$. La norme hilbertienne sur H est donnée par la formule $\|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$. On considère les fonctions suivantes dans H , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} r_n^+ : t &\mapsto \sqrt{2} \cos(nt + \frac{\pi}{4}), & r_n^- : t &\mapsto \sqrt{2} \cos(nt - \frac{\pi}{4}), \\ c_n : t &\mapsto \cos(nt), & s_n : t &\mapsto \sin(nt). \end{aligned}$$

On note également r_0 la fonction constante égale à 1.

- a. Montrer que la famille $\mathcal{F} = \{r_0, r_n^+, r_n^-; n \in \mathbb{N}^*\}$ est orthonormée dans H .

On fera la liste des calculs à effectuer pour vérifier que $\mathcal{F}$ est orthonormée, et on effectuera uniquement les calculs de $\|r_p^+\|^2$ et $(r_p^+ | r_q^-)$ pour $p, q \in \mathbb{N}^$.*

- b. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé on a $\text{Vect}(r_n^+, r_n^-) = \text{Vect}(c_n, s_n)$.
c. Montrer que $\mathcal{F}$ est une base hilbertienne de H .
d. Soit $f \in H$ telle que $f \perp r_n^-$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} f(t) dt \right|^2 + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt + \frac{\pi}{4}) dt \right|^2.$$

On rappelle les formules $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$, $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$.