Équations Différentielles

Révisions.

Exercice 1. Résoudre les équations différentielles suivantes dans $\mathbb{R}$:
— $x'' + x = \cos(t)$,
— $x'' + x = \cos(3t)$,
— $x'' - 2x' + x = 6e^t$,
— $x''' - 3x' + 2x = 2e^{-2t}$,
— $x'' + 2x' + 2x = 2t^2$.

Exercice 2. Résoudre les équations différentielles suivantes :
— $(t+1)x' + tx = t^2 - t + 1$ sur $]-1, +\infty[$,
— $x' + x\tan t = 1/\cos t$ sur $]-\pi/2, \pi/2[$,
— $2\sqrt{t}x' - x = t$ sur $\mathbb{R}_+^*$,
— $2(t-1)x' + x = t - 1$ sur $\mathbb{R}$,
— $(t-1)x' - x = (t-1)^2\cos t$ sur $\mathbb{R}$,
— $tx' - 2x = t^3$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3. Résoudre les systèmes différentiels suivants dans $\mathbb{R}$:

$$(I)\left\{\begin{array}{rl} x' = & x - 3y + 4z \\ y' = & 4x - 7y + 8z \\ z' = & 6x - 7y + 7z. \end{array}\right. \qquad (II)\left\{\begin{array}{rl} x' = & -x + 2y + 3z + 1 \\ y' = & 2x + 2y + 6z - 6t - 1 \\ z' = & x + 2y + z + 1. \end{array}\right.$$

$$(III)\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & 12x - 10y + 5z \\ y' & = & 10x - 8y + 5z \\ z' & = & -10x + 10y - 3z. \end{array}\right. \qquad (IV)\left\{\begin{array}{rcl} x'' + y' + 6x & = & 0 \\ y'' - x' + 6y & = & 0. \end{array}\right.$$

Pour le troisième on se limitera aux conditions initiales $x(0) = 2$, $y(0) = 3$, $z(0) = -1$.

Étude qualitative.

Exercice 4. On considère le problème de Cauchy $x' = \sin(x)$, $x(0) = \pi/2$.

a. Montrer que le problème admet une unique solution maximale f définie sur un intervalle ouvert $I =]a, b[$ contenant 0.

b. (i) Montrer qu'il n'existe pas de point $t \in I$ tel que $f(t) \in \pi\mathbb{Z}$.
On utilisera l'unicité dans le théorème de Cauchy-Lipschitz.
(ii) En déduire que f est bornée, puis que $I = \mathbb{R}$.

c. Retrouvons le résultat de la questions précédente par une autre méthode. On suppose $b < +\infty$ et on remarque que $|f'| \leq 1$. Montrer que f admet une limite en b^- et en déduire une contradiction.

d. Montrer que f admet une limite en $+\infty$, puis que cette limite vaut π.

Exercice 5. On considère le problème de Cauchy $x' = \frac{\pi}{2} + \arctan(t^2x^2)$, $x(0) = 0$.

a. Montrer que le problème admet une unique solution maximale f, et que cette dernière est impaire et définie sur un intervalle symétrique ouvert $I =]-a, a[$.

b. Montrer que f est croissante et convexe sur $[0, a[$.

c. Montrer qu'on a $\frac{\pi}{2}t \leq f(t) \leq \pi t$ pour tout $t \in [0, a[$. En déduire que $a = +\infty$.

d. (i) Montrer que $\lim_{+\infty} f = +\infty$, puis que $f(t) \sim_{+\infty} \pi t$.
(ii) On rappelle la formule $\arctan(t) + \arctan(1/t) = \pi/2$.
Montrer que $f(t) - \pi t$ admet une limite l lorsque $t \to +\infty$.
(iii) Montrer que $f(t) = \pi t + l + O(t^{-d})$ pour un certain entier $d \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 6. On considère l'équation différentielle (E) $x'' + p(t)x' + q(t)x = 0$, avec p, $q \in C(I, \mathbb{R})$.

a. Écrire le système différentiel d'ordre 1 associé à (E).

b. Soit (f, g) une base de solutions de (E) sur I.
Montrer que le wronskien w de (f, g) est de signe constant sur $\mathbb{R}$.

c. Soit f une solution non identiquement nulle de (E) sur $\mathbb{R}$ et $t_0 < t_1$ deux zéros de f.
Montrer que $f'(t_0) \neq 0$. En déduire que f ne s'annule qu'un nombre fini de fois dans $[t_0, t_1]$.
Pour tout zéro t_0 il existe ainsi un plus petit zéro $t_1 > t_0$. On dit que t_0, t_1 sont des zéros consécutifs de f.

d. Soit (f, g) une base de solutions de (E) sur I, et $t_0 < t_1$ deux zéros consécutifs de f.
Que peut-on dire des signes de $f'(t_0)$ et $f'(t_1)$?
À l'aide de la question b., montrer que g admet un zéro dans $]t_0, t_1[$ (*zéros entrelacés*).

Exercice 7. On considère l'équation différentielle (E) $x'' + q(t)x = 0$, avec $q \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

a. On suppose que q est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
  (i) Soit f une solution de (E) bornée sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que f'' est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
  (ii) En déduire que si f est une solution bornée sur $\mathbb{R}_+$ alors $\lim_{+\infty} f' = 0$.
  (iii) Soit (f, g) une base de solutions de (E) sur $\mathbb{R}$. Montrer que le wronskien w associé est constant et non nul.
  (iv) En déduire que f ou g est non bornée sur $\mathbb{R}_+$.

b. On suppose que q est croissante, de classe C^1, avec $q(0) > 0$. Soit f une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
  (i) Montrer qu'il existe une constante K telle que $f'(t)^2 + q(t)f(t)^2 = K + \int_0^t q'(s)f(s)^2 \mathrm{d}s$ pour tout $t \geq 0$.
  (ii) À l'aide du Lemme de Gronwall, montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 8. On considère l'équation différentielle (E) $x' = a(t)x + b(t)$, avec a, $b \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions 2π-périodiques. On note A la primitive de a nulle en 0.

a. Quelle est la structure de l'espace des solutions de (E) ?
En déduire que si x est solution de (E), il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}$ $x(t + 2\pi) = x(t) + \lambda e^{A(t)}$.

b. Rappeler la forme explicite des solutions de (E), en fonction de a et b.
Combien (E) admet-elle de solutions 2π-périodiques ? On discutera en fonction de a et b.

Résolution avancée.

Exercice 9. On considère une équation différentielle de la forme (B) $x' = a(t)x + b(t)x^\alpha$ avec a, $b \in C(I, \mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ (équation de Bernoulli).

a. Montrer qu'une solution non identiquement nulle de (B) ne s'annule jamais.
b. Montrer que si x est une solution non nulle de (B), $y = x^{1-\alpha}$ est solution d'une équation différentielle linéaire.
c. Déterminer les solutions maximales de $x' = x^3 - t^{-1}x$ définies sur des sous-intervalles de $\mathbb{R}_+^*$.

On considère maintenant une équation différentielle de la forme (R) $x' = a(t)x^2 + b(t)x + c(t)$, avec a, b, $c \in C(I, \mathbb{R})$ (équation de Ricatti).

d. Montrer que si f, g sont deux solutions de (R), alors $f - g$ est solution d'une équation de Bernoulli.
e. Résoudre $x' + x + x^2 + 1 = 0$ dans $\mathbb{C}$. On commencera par chercher des solutions constantes.

Exercice 10.

a. Résoudre l'équation différentielle (H) $t^2x'' - 2x = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
On cherchera d'abord une solution polynômiale u, puis une deuxième solution v sous la forme $v(t) = u(t)\varphi(t)$.

b. On cherche à résoudre l'équation différentielle (E) $t^2x'' - 2x = 3t^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
  (i) Écrire le système différentiel d'ordre 1 associé.
  (ii) On procède par variation des constantes : on cherche une solution particulière de (E) telle que $x(t) = \lambda(t)u(t) + \mu(t)v(t)$ et $x'(t) = \lambda(t)u'(t) + \mu(t)v'(t)$. Écrire le système linéaire vérifié par λ' et μ'.
  (iii) Conclure.

c. L'équation (E) admet-elle des solutions définies sur $\mathbb{R}$ entier ?

Exercice 11. On considère l'équation différentielle (E) $tx'' + x' + tx = 0$ (équation de Bessel d'ordre $\alpha = 0$).

a. Montrer que (E) admet une unique solution DSE en 0 telle que $x(0) = 1$.
b. Montrer que $f : t \mapsto \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(t \sin u)\mathrm{d}u$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
c. Montrer que ces solutions coïncident et en déduire la valeur des intégrales de Wallis $W_{2p} = \int_0^{\pi/2} (\sin u)^{2p} \mathrm{d}u$.
On note J_0 cette solution.
d. Soit g une solution de (E) sur $\mathbb{R}_+$, non colinéaire à J_0. On souhaite montrer que $g(t)$ est non bornée quand $t \to 0^+$. Par l'absurde, supposons que ce n'est pas le cas.
  (i) Calculer le wronskien de J_0 et g à une constante multiplicative près.
  (ii) En déduire que $g'(t) \sim_{0^+} C/t$, avec $C \neq 0$. Conclure.

Exercice 12. On considère l'équation différentielle (E) $x'' + e^{it}x = 0$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.

a. Rechercher les solutions développables en série de Fourier. On précisera le mode de convergence utilisé.
b. L'équation (E) admet-elle des solutions qui ne sont pas 2π-périodiques ?