

SÉRIES DE FOURIER

Exercice 1. Soit $P = \sum_{k=-N}^N c_k e_k$ un polynôme trigonométrique.

- Montrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $e^{iNt}P(t) = Q(e^{it})$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
- En déduire que la famille $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est libre.
- Soit $Z \subset [0, 2\pi[$ un ensemble fini. Montrer qu'il existe un polynôme trigonométrique P dont l'ensemble des zéros dans $[0, 2\pi[$ est exactement Z .
- Montrer que si $\#Z = 2N$ alors le polynôme de la question précédente est unique à une constante (non-nulle) près et vérifie $P'(t) \neq 0$ pour tout $t \in Z$.

Exercice 2. On considère la fonction 2π -périodique donnée par la formule $f(t) = 1 - \frac{t^2}{\pi^2}$ sur $]-\pi, \pi[$.

- Tracer l'allure du graphe de f . La fonction f est-elle continue? de classe $\mathcal{C}^1$?
- Déterminer les coefficients de Fourier trigonométriques de f .
- Étudier la convergence simple de la série de Fourier de f .
- En déduire $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ et $\eta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

Exercice 3. On considère la fonction 2 -périodique telle que $f(t) = t - t^3$ pour $t \in]-1, 1[$.

- Déterminer les coefficients de Fourier trigonométriques de f .
- En considérant $f(\frac{1}{2})$, déterminer la valeur de $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^3}$.

Exercice 4. On considère la fonction 2π -périodique donnée par la formule $f(t) = e^t$ sur $[0, 2\pi[$.

- Calculer les coefficients de Fourier exponentiels de f .
- En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$.

Exercice 5.

- Déterminer le développement en série entière en 0 de la fonction $f : z \mapsto \frac{1}{5+4z}$.
- En déduire les coefficients de Fourier exponentiels de la fonction $g : t \mapsto \frac{1}{5+4e^{it}}$.

Exercice 6. Pour $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ fixé on considère la fonction 2π -périodique donnée par $f(t) = \cos(\alpha t)$ sur $]-\pi, \pi[$.

- Calculer les coefficients de Fourier trigonométriques de f .
- Montrer que pour $a \notin \pi\mathbb{Z}$ on a $\frac{\cos(a)}{\sin(a)} = \frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a}{a^2 - \pi^2 n^2}$.
- On pose $u_n(t) = \ln(1 - \frac{t^2}{\pi^2 n^2})$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in]-\pi, \pi[$.
Montrer que la série de fonctions $(\sum_{n \geq 1} u'_n)$ converge uniformément sur tout segment de $]-\pi, \pi[$.
- À l'aide des questions précédentes, montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) = \ln(\sin(t)/t)$ pour $|t| < \pi$, $t \neq 0$.
- En déduire la formule $\sin(t) = t \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{t^2}{n^2 \pi^2})$ pour $t \in]-\pi, \pi[$.
Cette formule est en fait valable pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 7. On souhaite déterminer les solutions 2π -périodiques de l'équation différentielle (E) $y'' + y = |\sin x|$.

- Déterminer les coefficients de Fourier trigonométriques de $(x \mapsto |\sin x|)$.
- En déduire que $|\sin x| = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2nx)}{1-4n^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- Soit y une solution 2π -périodique de (E).
 - Montrer que $y \in \mathcal{C}^2 \cap \mathcal{C}_m^3$.
 - Exprimer les coefficients de Fourier de y'' en fonction de ceux de y .
En déduire les coefficients de Fourier $\gamma_k = c_k(y)$ pour $k \neq \pm 1$.
- Montrer qu'il existe une fonction $y \in \mathcal{C}_{2\pi}^2$ telle que $c_k(y) = \gamma_k$ pour $k \neq \pm 1$ et $c_1(y) = c_{-1}(y) = 0$.
 - Que peut-on dire de $c_k(y'' + y - |\sin x|)$? En déduire que y est solution de (E).
- Montrer que toutes les solutions de (E) sont 2π -périodiques.

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et 2π -périodique. On considère l'équation différentielle (E) $y' + y = f$.

- Soit y une solution 2π -périodique de (E). Justifier que $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$.
- Déterminer les coefficients de Fourier exponentiels de y en fonction de ceux de f .
- Montrer que $c_k(f) = o(1/k^2)$ en $\pm\infty$.
- Montrer que (E) admet une unique solution 2π -périodique.
- Montrer que le résultat de la question précédente reste valable si f est seulement de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 9. On considère la fonction f paire et 2π -périodique telle que $f(x) = \frac{1}{2}$ si $x \in [0, 1]$, $f(x) = 0$ si $x \in]1, \pi]$.

- Déterminer les coefficients de Fourier trigonométriques de f .
- En déduire la convergence et la somme de la série $(\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(n)}{n})$.
- En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sin n)^2}{n^2}$.

Exercice 10. On considère la fonction 2π -périodique donnée par la formule $f(t) = |t|$ pour $t \in]-\pi, \pi]$.

- Déterminer les coefficients de Fourier trigonométriques de f .
- En déduire la valeur de $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$.
- À l'aide de la question précédente, retrouver la valeur de $\zeta(2)$.
On pourra séparer les termes pairs et impairs dans l'expression de $\zeta(2)$.
- Déterminer les valeurs de $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}$ et $\zeta(4)$.

Exercice 11. Préciser si les séries de Fourier des exercices 2, 3 et 4 convergent en norme 2 et/ou en norme ∞ .

Exercice 12. Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^1$ telle que $\int_0^{2\pi} f(t)dt = 0$. Montrer que $\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \leq \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 dt$.
Caractériser les cas d'égalité.

Exercice 13. Pour $f \in L_{2\pi}^1$ et $g \in L_{2\pi}^{\infty}$ on définit $f * g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ par la formule

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(x-t)dt.$$

- Montrer que $f * g$ est bien définie et que $\|f * g\|_{\infty} \leq \|f\|_1 \|g\|_{\infty}$.
Vérifier que $(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- Calculer $e_n * g$ et montrer que $K_n * g = \sigma_n(g)$, où K_n est le noyau de Fejér.
En déduire que $\|\sigma_n(g)\|_{\infty} \leq \|g\|_{\infty}$ pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $g \in L_{2\pi}^{\infty}$.
A-t-on $\|S_n(g)\|_{\infty} \leq \|g\|_{\infty}$ pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $g \in L_{2\pi}^{\infty}$?
- Calculer les coefficients $c_n(f * g)$ en fonction des coefficients de f et g .
Déterminer toutes les fonctions $f \in L_{2\pi}^{\infty}$ telles que $f * f = f$.

Exercice 14. On considère l'équation de la corde vibrante sur $[0, 1]$:

$$\forall x \in [0, 1] \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (E)$$

où $c > 0$ est une constante dépendant de la nature de la corde. On cherche des solutions $u \in \mathcal{C}^2([0, 1] \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ qui vérifient les conditions initiales

$$\forall x \in [0, 1] \quad u(x, 0) = \varphi(x) \text{ et } \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \quad u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad (I)$$

où $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est la forme initiale de la corde.

- Analyse. Soit u une solution de classe $\mathcal{C}^2$ de (E) vérifiant (I). On complète u en une fonction de $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, par imparité et 2-périodicité en x .
On fixe $t \geq 0$. Montrer que $u(\cdot, t)$ est somme de sa série de Fourier.
On note $b_n(t)$ les coefficients de Fourier correspondant.
- Montrer qu'on a $b_n''(t) = -\pi^2 n^2 c^2 b_n(t)$ pour tout $t \geq 0$.
On mettra en œuvre le théorème de dérivation sous l'intégrale et on procèdera à deux IPP.
- Montrer que $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(0) \sin(\pi n x) \cos(\pi n c t)$ pour tous t, x .
- Montrer que $b_n(0) = b_n(\varphi)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- Synthèse. On suppose que φ est de classe $\mathcal{C}^4$. Montrer que $b_n(\varphi) = o(1/n^4)$.
- On pose $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(\varphi) \sin(\pi n x) \cos(\pi n c t)$ pour tous x, t . Montrer que u vérifie (E) et (I).
On mettra en œuvre le théorème de dérivation sous le signe somme.