

RÉVISIONS

Dans cette feuille, on appelle « équivalent simple de f en a » un équivalent de la forme $C(x-a)^\alpha(\ln(x-a))^\beta$ avec $C, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On appelle « équivalent simple de la suite $(u_n)_n$ » un équivalent de la forme $Cn^\alpha(\ln n)^\beta e^{\gamma n}$ — et de même pour les fonctions en $+\infty$. Attention, certaines fonctions n'admettent pas d'équivalent simple en ce sens, par exemple $\cos$ en $+\infty$. Il est bien sûr indispensable de connaître les DL usuels en 0 ; en ne gardant que leur terme dominant on a en particulier des « équivalents simples » en 0 pour $\sin(x)$, $\ln(1+x)$, ...

Exercice 1.

a. Changement de variable dans un équivalent

- (i) Montrer que si $f \sim_b g$ et $\lim_a u = b$, alors $f \circ u \sim_a g \circ u$ (avec $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$).
On pourra supposer que f et g ne s'annulent pas.
- (ii) Donner des équivalents simples des suites et fonctions suivantes :
 - $u_n = n^2 \sin(\frac{1}{n})$,
 - $f : x \mapsto \ln(x^2)$ en 1,
 - $g : x \mapsto \tan(2\sqrt{x})$ en 0.

b. Appliquer une fonction à un équivalent ?

- (i) Les suites $(2n)_n$, $(2n+1)_n$ sont-elles équivalentes ?
Les suites $(e^{2n})_n$, $(e^{2n+1})_n$ sont-elles équivalentes ?
Les fonctions $x \mapsto 1+x$, $x \mapsto 1+x^2$ sont-elles équivalentes en 0 ?
Les fonctions $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto \ln(1+x^2)$ sont-elles équivalentes en 0 ?
- (ii) Soit u, v deux fonctions telles que $u \sim_a v$. A-t-on $f \circ u \sim_a f \circ v$ pour toute fonction f ?

c. Cas particuliers

On pourra supposer que u et v ne s'annulent pas.

- (i) On suppose que $u \sim_a v$. Montrer que $u^\alpha \sim_a v^\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.
- (ii) On suppose que $u \sim_a v$ et $\lim_a u = \lim_a v = 0$ ou $+\infty$. Montrer que $\ln \circ u \sim_a \ln \circ v$.
- (iii) Donner des équivalents simples des suites et fonctions suivantes :
 - $u_n = \ln(n^2 + 1)$,
 - $f : x \mapsto \sqrt{2x^3 + x^2}$ en 0,
 - $g : x \mapsto \ln(\sin(x))$ en 0.
- (iv) Montrer que $\ln \circ u \sim_a u - 1$ si $\lim_a u = 1$.
En déduire un équivalent simple de $\ln(\cos x)$ en 0.

Exercice 2. Déterminer des équivalents simples des suites suivantes :

- $o_n = 3n^2 \tan(1/n)$,
- $p_n = \frac{2n^4 - 2n^3}{n^3 + n^6}$,
- $q_n = 4^n \sin(2^{-n})$,
- $r_n = 2n^2 - n$,
- $s_n = \sqrt{n} + (\ln n)^3 + \sin(n)$,
- $t_n = e^n + n^e$,
- $u_n = \sin(\frac{n+1}{n^2})$,
- $v_n = \ln(1 + e^n)$,
- $w_n = \ln(1 + e^{-n})$,
- $x_n = \ln(\frac{n+1}{n^2+2})$,
- $y_n = \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$,
- $z_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

Lesquelles de ces suites sont des $o(n^2)$? des $O(n^{-1})$?

Exercice 3. Donner des équivalents simples des fonctions suivantes, en 0 et en $+\infty$:

- $i : x \mapsto x^2 + x$,
- $j : x \mapsto x + \sqrt{x}$,
- $k : x \mapsto x + 1 + \ln(x)$,
- $l : x \mapsto \ln(x) + (\ln(x))^2$,
- $m : x \mapsto e^x + \sin(x)$,
- $n : x \mapsto \ln(1+x) - \sin(x)$.

Exercice 4.

À l'aide de DL, donner des équivalents simples des fonctions suivantes aux points demandés :

- $f : x \mapsto 2e^x - \sqrt{1+4x} - \sqrt{1+6x^2}$ en 0,
- $g : x \mapsto \ln(1+x) + \ln(1-x)$ en 0,
- $h : x \mapsto \ln(x)$ en 0, 1, 2, $+\infty$,
- $i : x \mapsto \sqrt{2+x} - \frac{x}{4} - \frac{3}{2}$ en 2,
- $j : x \mapsto \cos(x) - \sin(x)$ en $\frac{\pi}{4}$,
- $k : x \mapsto e^x - e^{2-x}$ en 1,
- $l : x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ en $+\infty$,
- $m : x \mapsto \sqrt{x^2+1} - 2\sqrt[3]{x^3+x} + \sqrt[4]{x^4+x^2}$ en $+\infty$,
- $n : x \mapsto \ln(x+1) - \ln(x)$ en $+\infty$.

Exercice 5. Calculer les intégrales suivantes :

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_1^2 \frac{dx}{x(1+\ln x)}, & I_2 &= \int_0^1 \frac{dx}{\operatorname{ch} x}, & I_3 &= \int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt, \\
 I_4 &= \int_0^1 x^2 e^x dx, & I_5 &= \int_1^2 (\ln x)^2 dx, & I_6 &= \int_1^e x (\ln x)^2 dx, \\
 I_7 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos(2x) dx, & I_8 &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(\sin x)^2} dx, & I_9 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos x)^3 (\sin x)^3}{1 + (\sin x)^2} dx, \\
 I_{10} &= \int_0^1 \frac{e^x dx}{10 - 3e^x}, & I_{11} &= \int_0^1 \frac{dx}{4x^2 + 9}.
 \end{aligned}$$

Exercice 6. Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

$$\begin{aligned}
 f_1(x) &= \frac{1}{1+\sqrt{x}}, & f_2(x) &= x^2 \sqrt{1+x^3}, & f_3(x) &= \frac{1+\ln x}{x \ln x}, & f_4(x) &= \frac{x^2}{2+x^3}, \\
 f_5(x) &= (x+1)e^x, & f_6(x) &= e^x \sin x, & f_7(x) &= \arctan x, & f_8(x) &= x \cos 2x, \\
 f_9(x) &= \frac{x^2}{(x^2+1)^2}, & f_{10}(x) &= \frac{x}{x^3-3x+2}, & f_{11}(x) &= \frac{x\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}, \\
 f_{12}(x) &= (x^2-x+3) \sin x, & f_{13}(x) &= \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}, & f_{14}(x) &= \frac{\sin 3x}{\sqrt{\cos x}}.
 \end{aligned}$$