

ESPACES DE HILBERT

Exercice 1. On utilise le produit hermitien canonique de $\mathbb{C}^n$.

- Montrer que pour tous $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}$ on a $|\sum_{i=1}^n x_i|^2 \leq n \sum_{i=1}^n |x_i|^2$. Cas d'égalité ?
- Montrer que pour tous $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+$ tels que $x_1 + \dots + x_n = 1$ on a $\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \geq n^2$.

Exercice 2. Soit H un espace préhilbertien complexe.

- Soient $u, v : H \rightarrow H$ des fonctions. Montrer que si pour tous $x, y \in H$ on a $(u(x) | y) = (x | v(y))$ alors u et v sont linéaires.
- Montrer que si $u : H \rightarrow H$ est linéaire et $(u(x) | x) = 0$ pour tout $x \in H$, alors $u = 0$.

Exercice 3. On munit $\Omega = \{\pm 1\}^n$ de la mesure de probabilité uniforme. On note $E = \mathbb{R}^\Omega$ l'espace des variables aléatoires réelles sur Ω . On considère les variables $\epsilon_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$.

- Vérifier que les ϵ_i sont des variables de Bernoulli indépendantes.
- Vérifier que la formule $(X | Y)_E = \mathbb{E}(XY)$ définit un produit scalaire sur E .
- Vérifier que $(\epsilon_i)_i$ est une famille orthonormée de E .

Soit H un espace pré-hilbertien réel. Si X est une variable aléatoire réelle et v est un vecteur de H , alors Xv est une variable aléatoire à valeurs dans H . Si V est une variable aléatoire à valeurs dans H , alors $\|V\|_H$ est une variable aléatoire réelle.

- Montrer que pour toute famille de vecteurs $v_1, \dots, v_n \in H$ on a $\mathbb{E}(\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i v_i\|_H^2) = \sum_{i=1}^n \|v_i\|_H^2$.

Exercice 4. Soit $E = M_n(\mathbb{R})$ muni de la forme bilinéaire $(A | B) = \text{Tr}({}^tAB)$.

- Montrer que E , muni de cette forme, est un espace préhilbertien réel.
- Montrer que pour toute $A \in M_n(\mathbb{R})$ on a $|\text{Tr}(A)| \leq \sqrt{n}\|A\|$. Préciser le cas d'égalité.
- On note $E_{i,j}$ la matrice qui a un 1 en position (i, j) et des 0 ailleurs. Montrer que $E_{i,j}$ est une base orthonormée de E .
- Calculer $\|A\|^2$ en fonction des coefficients $A_{i,j}$ de A . Retrouver l'inégalité du b. à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwartz dans $\mathbb{R}^n$.
- Déterminer une base orthonormée du sous-espace des matrices symétriques, $S_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^tA = A\}$.

Exercice 5. Soit $E = \mathcal{C}^1([-1, 1], \mathbb{C})$. Pour $f \in E$ on pose $N(f)^2 = |f(0)|^2 + \int_{-1}^1 |f'(t)|^2 dt$.

- Montrer que N est une norme associée à un produit scalaire.
- Montrer que pour tous $t \in [-1, 1]$ et $f \in E$ on a $|f(t)| \leq \sqrt{2}N(f)$.
- Montrer que le sous-espace $F = \{f \in E \mid f(1) = 0\}$ est fermé.
- Qu'en est-il pour le sous-espace $G = \{f \in E \mid f'(1) = 0\}$?

Exercice 6. Appliquer la méthode de Gram-Schmidt à la famille (u_1, u_2, u_3) de $\mathbb{C}^3$, où

$$u_1 = (1, 0, 1), u_2 = (2, -i, 0) \text{ et } u_3 = (i, 1, 0).$$

Exercice 7. On considère l'espace $H = L^2(\mathbb{R}_+, \mu)$ où μ est la mesure de densité $d(t) = e^{-t}$ par rapport à la mesure de Lebesgue. Pour $f, g \in H$ on a donc $(f | g) = \int_0^{+\infty} f(t)g(t)e^{-t} dt$.

- Justifier qu'on peut identifier $\mathbb{R}[X]$ à un sous-espace de H .
- On note $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la famille orthogonale de polynômes unitaires telle que $\text{Vect}\{L_0, \dots, L_n\} = \mathbb{R}[X]_n$ pour tout n (polynômes de Laguerre). Calculer L_1, L_2, L_3 .
- Soit A une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1$. Montrer que $\mathbb{E}(A^3 - 5A^2 + 6A - 2) = 0$.
- Déterminer le minimum de $I(a, b, c) = \int_0^{+\infty} |t^3 + at^2 + bt + c|^2 e^{-t} dt$ et le point (a, b, c) où il est atteint.

Exercice 8. Soit $H = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid (\sum_n 4^n |u_n|^2) \text{ converge}\}$. Pour $u = (u_n)_n \in H$ on pose $\|u\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} 4^n |u_n|^2$. Pour $k \in \mathbb{N}$ on note $\delta_k = (\delta_{k,n})_n$

- Montrer que $(H, \|\cdot\|)$ est un espace pré-hilbertien.
- Trouver une isométrie surjective $f : \ell^2(\mathbb{N}) \rightarrow H$. En déduire que H est un espace de Hilbert.
- Donner une base hilbertienne $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de H .
- Soit $S : H \rightarrow H$ donné par $S(u) = (u_{n+1})_n$. Montrer que S est borné et calculer S^* .

Exercice 9. On travaille dans $H = L^2([-1, 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $(f | g) = \int_{-1}^1 fg$.

On note L_n la dérivée n^e du polynôme $P_n = (1 - X^2)^n$.

- Montrer que L_n est un polynôme de degré n .
- Montrer que $P_n^{(k)}$ s'annule en 1 et -1 , pour tout $k < n$.
- Montrer que $(L_m | L_n) = 0$ pour $m < n$ en procédant à m IPP.
- Comparer les L_n aux polynômes de Legendre.

Exercice 10. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ telle que $\int_I |t|^n f(t) dt < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ on pose $(P | Q) = \int_I P(t)Q(t)f(t)dt$. On admet que cela définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

- Montrer qu'il existe une unique famille orthogonale de polynômes moniques $(P_n)_n$ tels que $\deg P_n = n$.
- Montrer que si f est paire sur I symétrique, P_n est de même parité que n .
- Montrer que XP_n est orthogonal à $\mathbb{R}[X]_{n-1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- En déduire l'existence de coefficients a_n, b_n tel que $P_{n+2} = (X + a_n)P_{n+1} + b_n P_n$.
- Montrer que $b_n = -\|P_{n+1}\|^2 / \|P_n\|^2$, et que si f est paire sur I symétrique, $a_n = 0$.

Exercice 11. Soit H un espace de Hilbert et $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille de vecteur unitaires telle que $\sum_{n=1}^{\infty} |(e_n | x)|^2 = \|x\|^2$ pour tout $x \in H$. Montrer que $(e_n)_n$ est une base hilbertienne de H . On pourra commencer par le cas de la dimension finie.

Exercice 12. On munit $\mathbb{R}^4$ de sa structure euclidienne canonique et on considère les vecteurs suivant :

$$u_1 = (2, 1, 0, 2), \quad u_2 = (0, 1, 0, 1), \quad u_3 = (2, 1, 3, 1), \quad u_4 = (1, 1, 1, 1).$$

- Soit P le plan de $\mathbb{R}^4$ engendré par u_1 et u_2 . Calculer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur P .
- Orthonormaliser (u_1, u_2, u_3, u_4) . En déduire une base orthonormale de $P^\perp$ et l'utiliser pour vérifier le résultat de la question précédente.

Exercice 13. On fixe $n \in \mathbb{N}$ et pour $P \in \mathbb{R}[X]_n$ on pose $\|P\|^2 = \sum_{i=0}^n P(i)^2$

- Montrer que $\|\cdot\|^2$ est une norme euclidienne sur $\mathbb{R}[X]_n$.
- En utilisant les polynômes de Lagrange $L_i = \prod_{0 \leq j \leq n, j \neq i} (X - j)$, donner une base orthogonale de $\mathbb{R}[X]_n$.
- Soit $0 \leq r \leq n$ fixé. On considère le sous-espace $F = \{P \in \mathbb{R}[X]_n \mid P(r) = 0\}$.
 - Montrer que F est engendré par certains polynômes L_i et en déduire un vecteur directeur de $F^\perp$.
 - En déduire une formule pour le projeté orthogonal d'un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ sur F .
- (i) Montrer qu'il existe des réels $a_0, \dots, a_n$ tels que $P(n^2) = \sum_{i=0}^n a_i P(i)$ pour tout $P \in \mathbb{R}[X]_n$.
On pourra utiliser une forme linéaire $\varphi : \mathbb{R}[X]_n \rightarrow \mathbb{R}$ bien choisie.
- (ii) Calculer les réels a_i à l'aide des polynômes L_i .

Exercice 14. En utilisant les polynômes de Legendre, déterminer les trois réels a, b, c qui minimisent la quantité

$$\varphi(a, b, c) = \int_{-1}^1 |e^t - a - bt - ct^2|^2 dt.$$

Exercice 15. Pour $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ on pose $(A | B) = \text{Tr}({}^t \bar{A} B)$.

- Montrer que cela munit $M_n(\mathbb{C})$ d'une structure d'espace de Hilbert.
- On considère $S_n(\mathbb{C}) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid {}^t A = A\}$ et $A_n(\mathbb{C}) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid {}^t A = -A\}$.
Montrer que $S_n(\mathbb{C}) \perp A_n(\mathbb{C})$ et que $S_n(\mathbb{C}) \oplus A_n(\mathbb{C}) = M_n(\mathbb{C})$.
- On définit $p : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_n(\mathbb{C})$ en posant $p(A) = \frac{1}{2}(A + {}^t A)$.
Reconnaître l'application p . Montrer que $\|p\| = 1$ et $p^* = p$.

Exercice 16. On munit $H = L^2([-1, 1], \mathbb{C})$ du produit scalaire $(f | g) = \int_{-1}^1 \bar{f}g$. On considère l'application $S : H \rightarrow H$ donnée par $S(f) = (t \mapsto f(-t))$ et les sous-espaces $P, I \subset H$ formés des fonctions paires, respectivement impaires.

- Montrer que S est un opérateur borné.
- Montrer que P et I sont fermés et que $P \perp I$.
- Montrer que $H = P \oplus I$. Donner une formule pour la projection orthogonale sur P .
- Soit $e : t \mapsto e^t$. Calculer $d(e, P)$.

Exercice 17. On munit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ du produit scalaire $(f | g) = \int_0^1 fg$.

- Soit $v_n \in E$ donné par $v_n(t) = 1 - t^n$. Déterminer la limite simple de $(v_n)_n$.
- Montrer que pour toute $f \in E$ on a $\lim_n (fv_n | f) = \|f\|^2$ et $\lim_n \|f - fv_n\|_2 = 0$.
- Soit $F = \{f \in E \mid f(1) = 0\}$. Montrer que $F^\perp = 0$ et que F est dense dans E .

Exercice 18. Soit E un espace de Hilbert réel ou complexe et $p : E \rightarrow E$ une projection. Montrer que p est une projection orthogonale si et seulement si $\|p\| \leq 1$. Pour la réciproque on pourra faire un dessin en dimension 2.

Exercice 19. Soit $E = \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $(f | g) = \int_{-1}^1 fg$.

On considère la forme linéaire $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto \int_0^1 f$.

- Montrer que φ est continue et de norme inférieure ou égale à 1.
- On suppose qu'il existe $g \in E$ telle que $\varphi(f) = \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt$ pour toute $f \in E$.
 - Montrer que $\|g\| = 1 = \int_0^1 g(t)dt$.
 - A l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que $g = \mathbb{1}_{[0,1]}$ presque partout.
 - En déduire que E n'est pas complet.
- On fixe $n \geq 1$.
 - Montrer qu'il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]_n$ tel que $\phi(Q) = \int_{-1}^1 Q(t)P_n(t)dt$ pour tout $Q \in \mathbb{R}[X]_n$.
 - Montrer que $\|P_n\| \leq 1$ pour tout n .
 - Calculer P_3 .
 - Montrer que $\|\varphi\| = 1$ et en déduire que $\sup_n \|P_n\| = 1$.

Exercice 20. On considère $E = \mathbb{R}[X]$ munit de la forme bilinéaire $(P | Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$.

- Montrer que cette forme bilinéaire est bien définie, et est un produit scalaire.
- Pour $P \in E$ on pose $h(P) = XP'' + (1 - X)P'$. Montrer que h est auto-adjoint.

Exercice 21. On considère l'espace de Hilbert $H = L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. On fixe $g \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Pour $f \in H$ on pose $M_g(f) = fg$ et $T(f) = (t \mapsto f(t - 1))$.

- Montrer que M_g est un opérateur borné de norme $\|g\|_\infty$.
- Montrer que $M_g^* = M_{\bar{g}}$.
- Montrer que T est un opérateur isométrique.
- Calculer T^* et en déduire que T est unitaire.