

SÉRIES DE FONCTIONS

Révisions

Exercice 1. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\left(\sum_n \frac{n^3}{(n-1)!} (z-i)^n \right), \quad \left(\sum_n (1+i)^n z^n \right), \quad \left(\sum_n \frac{2^n + i}{3^n - i} z^{2n} \right), \quad \left(\sum_n \frac{(3n)!}{(n!)^3} (z+1)^{3n} \right).$$

Exercice 2.

- Montrer qu'il existe a, b, c tels que $n^2 = a + bn + cn(n-1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et déterminer ces réels.
- À l'aide de séries entières, calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n^2+1)2^n}{n!}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{(1+i)^n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n!}.$$

Exercice 3. On considère $f : x \mapsto \frac{1+2x}{1+x+x^2}$.

- Soit j la racine de $X^2 + X + 1$ telle que $\text{Im}(j) > 0$.
Rappeler l'expression trigonométrique de j et vérifier que $\bar{j} = j^2 = j^{-1}$.
- Décomposer f en éléments simples dans $\mathbb{C}$. Développer f en série entière en 0.

Exercice 4. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{e^t - 1} dt = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} t^2 e^{-nt} dt = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$.

Exercice 5. On considère la série entière $\left(\sum_{n \geq 1} f_n(x) \right)$ avec $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1} x^{2n+1}$.

- Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière. On note f sa somme.
- Calculer $(f'(x)/x)'$ puis f' et enfin f sur $] -R, R[$, sans le symbole somme.
- En déduire que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$.

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction 2π -périodique, impaire, telle que $f(t) = 1$ pour $t \in]0, \pi[$ et $f(\pi) = 0$.

- Calculer les coefficients de Fourier trigonométriques de f .
- La série de Fourier de f converge-t-elle simplement ? dans L^2 ? uniformément ? vers quelle fonction ?
- En déduire les valeurs des sommes suivantes :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

Séries de fonctions

Exercice 7. On pose $f_n(t) = \frac{1}{n} \cos(nt)$ pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in I =]0, 2\pi[$. Pour étudier la série de fonctions $(\sum f_n)$ on pose $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n(t) = \cos(nt)$ et $B_n(t) = \sum_{k=1}^n b_k(t)$.

- Procéder à la *transformation d'Abel* qui relie les sommes $\sum_{k=p}^q a_k b_k(t)$ et $\sum_{k=p}^q (a_k - a_{k+1}) B_k(t)$.
- On fixe $t \in I$. Montrer que les sommes partielles $B_n(t)$ sont bornées.
- En observant que $(a_n)_n$ est décroissante, en déduire que la série numérique $(\sum f_n(t))$ converge.
- Montrer que cette série ne converge pas absolument. *On pourra utiliser l'identité $(\cos \theta)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\theta)$.*
- Montrer que la série de fonctions $(\sum f_n)$ converge uniformément sur tout compact de I .
Converge-t-elle normalement sur tout compact de I ?
- Montrer que la série de fonctions $(\sum f_n)$ ne converge pas uniformément sur I .
Pour $n \in \mathbb{N}^$ fixé, on montrera qu'il existe $t \in I$ tel que $f_k(t) \geq \frac{1}{4n}$ pour tout $n < k \leq 2n$.*
- Montrer que la série de fonctions $(\sum f_n)$ converge dans $L^2(I)$.
- On note f la somme de la série de fonctions $(\sum f_n)$. Au vu des questions précédentes, qu'obtient-on comme propriétés de f ? Quels sont les coefficients de Fourier de f ?

Exercice 8. On pose pour $n \geq 2$ et $x \geq 0$, $f_n(x) = xe^{-nx}/\ln n$.

- Montrer $(\sum f_n)$ converge normalement sur tout compact de $\mathbb{R}_+^*$, mais pas sur $\mathbb{R}_+^*$.
- On note F la somme de cette série de fonctions.
Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $F(x) = o(1/x^n)$ en $+\infty$ pour tout $n \geq 1$.
- Montrer que $(\sum f_n)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi F est aussi continue en 0.
On pourra tout d'abord vérifier que $\sum_{n=2}^{\infty} xe^{-nx}$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$.
- Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ mais n'est pas dérivable à droite en 0.

Séries entières

Exercice 9. On fixe $|a| < 1$ et on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sin(a^n x)$.

- Montrer que $f(x)$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.
- Montrer que f est de classe C^1 , puis C^∞ sur $\mathbb{R}$.
- Exprimer $f^{(k)}(x)$ comme somme d'une série.
En déduire que $|f^{(k)}(x)| \leq 1/(1 - |a|)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$.
- Montrer que f est analytique sur $\mathbb{R}$ et déterminer son DSE en 0.

Exercice 10. On considère la série de fonctions $(\sum_{n \geq 0} f_n)$ avec $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, x \mapsto e^{-n} e^{in^2 x}$.

- Calculer $f_n^{(k)}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $k, n \in \mathbb{N}$.
- Montrer que $(\sum f_n^{(k)})$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On note $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$.
- Montrer que f est C^∞ et calculer $f^{(k)}$ comme somme d'une série de fonction, pour tout $k \in \mathbb{N}$.
- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, exprimer $f^{(k)}(0)$ comme somme d'une série et montrer que $|f^{(k)}(0)| \geq k^{2k} e^{-k}$.
- Quel est le rayon de convergence de la série de Taylor de f en 0?

Exercice 11. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

- Montrer que f est développable en série entière au point 0 et que le rayon de convergence de la série entière ainsi obtenue est infini.
- Montrer que f est solution de l'équation différentielle $y' - xy = 1$.
- En déduire le développement en série entière au point 0 de f .
- Démontrer l'égalité : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1 \times 3 \times \dots \times (2n+1)} = \sqrt{e} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2 \times 4 \times \dots \times 2n \times (2n+1)}$.

Séries de Fourier

Exercice 12.

- Calculer les coefficients de Fourier trigonométriques de la fonction $|\sin|$.
- En déduire que $|\sin \theta| = \frac{8}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{(\sin n\theta)^2}{4n^2 - 1}$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.
- Soit $f \in C([a, b])$. Calculer la limite de $\int_a^b f(t) |\sin(\lambda t)| dt$ quand $\lambda \rightarrow +\infty$.

Exercice 13. Soit $f \in C^\infty([0, \pi])$ telle qu'on a $f^{(2k)}(0) = f^{(2k)}(\pi) = 0$ et $(-1)^k f^{(2k)} \geq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On va montrer que f est nécessairement un multiple de la fonction sinus.

- On prolonge f à $\mathbb{R}$ par imparité et 2π -périodicité. Montrer que f est alors de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
- Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $b_n(f) = n^{-2k} \frac{4}{\pi} \int_0^\pi (-1)^k f^{(2k)}(t) \sin(nt) dt$.
- Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}$ on a $|\sin(nt)| \leq n |\sin(t)|$.
- Montrer que pour tout $n \geq 2$ on a $b_n(f) = 0$. Conclure.

Exercice 14. Soit $E = C([- \pi, \pi], \mathbb{R})$ et $F = C^1([- \pi, \pi], \mathbb{R}) \subset E$. Soit $T \in L(E)$, continu pour la norme $\|\cdot\|_\infty$, tel que $T(F) \subset F$ et $T(f') = T(f)'$ pour toute $f \in F$. On va montrer que $T = \lambda \text{Id}$ pour un $\lambda \in \mathbb{R}$. On note $c_n : x \mapsto \cos(nx)$ et $s_n : x \mapsto \sin(nx)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

- Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$ il existe $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}$ tels que $T(c_n) = \alpha_n c_n + \beta_n s_n$. Montrer que $|\alpha_n|, |\beta_n| \leq \|T\|$.
- Montrer qu'il existe $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ tels que $T(X^2) = \lambda X^2 + \mu X + \nu$, et que $\lambda = T(1)$.
- Décomposer X et X^2 en séries de Fourier réelles, préciser les modes de convergence.
- Montrer que $\nu = 0$, $\alpha_n = \lambda$ et $\beta_n = -\frac{1}{2} n \mu$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- Montrer que $T(f) = \lambda f$ pour $f = 1, X, c_n, s_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$). Conclure.

Exercice 15. Soit w une fonction continue paire sur $] -a, a[$, avec éventuellement $a = +\infty$. On suppose que les fonctions polynômiales sont dans $L^2(]-a, a[, w)$ et on note $(S_n)_n$ la suite des polynômes orthogonaux associés, avec coefficients dominants égaux à 1.

- Observer que pour tous polynômes Q, R on a $(XQ | R) = (Q | XR)$.
- Montrer que pour $n \geq 2$ il existe des réels a_n, b_n tels que $XS_{n-1} = S_n + a_n S_{n-1} + b_n S_{n-2}$.
On pourra notamment montrer que $(XS_{n-1} | S_k) = 0$ pour $k < n-2$.
- Montrer par récurrence que S_n a la même parité que n et $a_n = 0$ pour tout n .
On notera que si S_{n-1} est pair ou impair, $(S_{n-1} | XS_{n-1}) = 0$.
- Montrer que $b_n = \|S_{n-1}\|^2 / \|S_{n-2}\|^2$ pour tout n .

Une telle suite de polynômes orthogonaux vérifie donc toujours une récurrence d'ordre 2 de la forme

$$\forall n \geq 2 \quad S_n = XS_{n-1} - b_n S_{n-2}.$$

On pose $K_n(x, y) = \sum_{k=0}^n S_k(x)S_k(y) / \|S_k\|^2$ (noyau de Christoffel-Darboux) et, pour $f \in L^2(]-a, a[, w)$:

$$(P_n f)(x) = \int_{-a}^a K_n(x, y) f(y) w(y) dy.$$

- Montrer que $P_n f$ est le projeté orthogonal de f sur $\mathbb{R}[X]_n \subset L^2(]-a, a[, w)$.
- Montrer par récurrence que pour $x \neq y$ dans $] -a, a[$:

$$K_n(x, y) = \frac{S_{n+1}(x)S_n(y) - S_n(x)S_{n+1}(y)}{\|S_n\|^2(x - y)}.$$

Exercice 16. On considère les polynômes de Tchebychev T_n , qui sont les polynômes orthogonaux pour le poids $w(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ sur l'intervalle $] -1, 1[$, normalisés par la convention $T_n(1) = 1$.

- Vérifier que les polynômes sont bien dans $L^2(]-1, 1[, w)$. Calculer T_0, T_1, T_2 à l'aide du procédé de Gram-Schmidt. *Le changement de variable $x = \sin(t)$ est utile pour calculer les produits scalaires.*
- Forme trigonométrique et relation de récurrence.
 - Montrer par récurrence qu'il existe pour tout n un unique polynôme C_n tel que $C_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$ pour tout θ . *On pourra utiliser la relation $\cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) = 2\cos(\theta)\cos(n\theta)$.*
 - Montrer par changement de variable que $(C_n | C_m) = \delta_{n,m} \frac{\pi}{2}$ pour $m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}^*$.
 - En déduire que $C_n = T_n$ pour tout n , et qu'on a la relation de récurrence

$$\forall n \geq 2 \quad T_n = 2XT_{n-1} - T_{n-2}.$$

Comparer avec l'exercice précédent.

- Montrer que $T_{2p}(0) = (-1)^p$ et $T'_{2p+1}(0) = (-1)^p(2p+1)$.
- Équation de Sturm-Liouville. On considère l'équation différentielle

$$(E_p) \quad (1-x^2)y'' - xy' + 4p^2y = 0.$$

Pour $f \in C^\infty(]-1, 1[)$ on note $L(f) : x \mapsto \sqrt{1-x^2} \frac{d}{dx} (\sqrt{1-x^2} \frac{d}{dx} f(x))$.

- Montrer que (E_p) admet une unique solution f_p sur $] -1, 1[$ telle que $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.
- Chercher un DSE de f_p en 0 et en déduire que f_p est polynômiale, paire, de degré $2p$.
- Montrer que f_p est vecteur propre de l'opérateur L , pour une valeur propre à préciser.
- Montrer que pour f, g polynômiales on a $f, L(f) \in L^2(]-1, 1[, w)$ et $(L(f) | g) = (f | L(g))$.
- En déduire que $(f_p | f_q) = 0$ si $p \neq q$, puis que $T_{2p} = (-1)^p f_p$.

On montrerait de même que $T_{2p+1} = (-1)^p(2p+1)g_p$, où g_p est l'unique solution du problème de Cauchy

$$(1-x^2)y'' - xy' + (2p+1)^2y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

- Formule de Rodrigues. On pose pour tous $k, n \in \mathbb{N}$ et $x \in] -1, 1[$:

$$P_{n,k}(x) = (1-x^2)^{k-n+\frac{1}{2}} \frac{d^k}{dx^k} (1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}.$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que $P_{n,k} \in \mathbb{R}[X]_k$.
- Montrer que pour tout polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $k \leq n$ on a, dans $L^2(]-1, 1[, w)$:

$$(Q | (1-X^2)^{n-k} P_{n,k}) = (Q' | (1-X^2)^{n-k+1} P_{n,k-1}).$$

- En déduire que $(Q | P_{n,n}) = 0$ pour tout $Q \in \mathbb{R}[X]_{n-1}$.
- Montrer que $P_n := P_{n,n}$ est proportionnel à T_n pour tout n . *Avec un peu plus d'effort on peut déterminer le coefficient de proportionnalité en calculant $P_{n,k}(1)$ pour tous n, k .*