

SÉRIES NUMÉRIQUES

Exercice 1. On considère la série $(\sum_{k \geq 2} u_k)$ avec $u_k = \frac{1}{\sqrt{k-1}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{2}{\sqrt{k}}$.

- Simplifier les sommes partielles $S_n = \sum_{k=2}^n u_k$.
- En déduire que la série $(\sum_{k \geq 2} u_k)$ converge.

Exercice 2. On considère la série de terme général $u_n = \ln(1 - \frac{1}{n^2})$ pour $n \geq 2$.

- Calculer explicitement les sommes partielles $S_n = \sum_{k=2}^n u_k$ en fonction de n .
- En déduire que la série $(\sum_{k \geq 2} u_k)$ converge et calculer sa somme.

Exercice 3.

- Calculer $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2+\dots+n}$.
- Calculer $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{4}{2n+1} \right)$. On rappelle que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$.
- Calculer $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1^2+2^2+\dots+n^2}$.

Exercice 4. Déterminer la nature de la série à termes positifs $(\sum_{n \geq 10} u_n)$ dans les cas suivants :

- | | | |
|---|---|---|
| 1) $u_n = \frac{n}{n^2 + 3}$, | 2) $u_n = \frac{n^3 + 6}{n + 4}$, | 3) $u_n = \sqrt{\ln(1 + \frac{1}{n})}$, |
| 4) $u_n = \frac{2n + 3}{2^n}$, | 5) $u_n = \frac{\sqrt{n} + 1}{n + \ln n}$, | 6) $u_n = n \sin \frac{1}{n}$, |
| 7) $u_n = 1 - \cos \frac{1}{n}$, | 8) $u_n = \left(\frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n} \right)^{5/6}$, | 9) $u_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2}$, |
| 10) $u_n = \frac{1}{\ln(n^3 + n + 1)}$, | 11) $u_n = 2^{-\sqrt{n}}$, | 12) $u_n = \frac{n^2}{(n-1)!}$, |
| 13) $u_n = n^{-1-1/\sqrt{n}}$, | 14) $u_n = \frac{2^n + 3^n}{n^2 + (\ln n)^2 + 5^n}$, | 15) $u_n = \arctan(n)$, |
| 16) $u_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$, | 17) $u_n = ne^{\frac{1}{n}} - n - \cos \frac{1}{n}$, | 18) $u_n = \frac{(n!)^2}{2n^2}$, |
| 19) $u_n = \frac{(\sin(n^2 + 2))^2}{n^3}$, | 20) $u_n = \frac{1 + (-1)^n}{n}$, | 21) $u_n = \frac{1}{\ln n} + \frac{1}{\ln(n+1)} - \frac{2}{\ln(n+2)}$, |
| 22) $u_n = \frac{n!}{n^{2n}}$, | 23) $u_n = \left(\frac{1}{n+1} - \frac{a}{n} \right)^2$ où $a > 0$, | 24) $u_n = \frac{n^a (\ln n)^n}{n!}$ où $a > 0$. |

Exercice 5. Soient $(\sum_{n \geq n_0} u_n)$ et $(\sum_{n \geq n_0} v_n)$ deux séries à termes positifs convergentes. Montrer que les séries suivantes convergent en utilisant les théorèmes de comparaison :

$$(\sum_{n \geq n_0} \max\{u_n, v_n\}), \quad (\sum_{n \geq n_0} \sqrt{u_n v_n}), \quad (\sum_{n \geq n_0} u_n^2).$$

Trouver un exemple de série convergente $(\sum_{n \geq n_0} u_n)$ telle que $(\sum_{n \geq n_0} u_n^2)$ diverge.

Exercice 6. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite positive. On note $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ et $P_n = \prod_{k=0}^n (1 + u_k)$.

- Montrer que $S_n \leq P_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Montrer que pour tout $x \geq 0$, $1 + x \leq e^x$. En déduire que $P_n \leq e^{S_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- En déduire que la suite $(P_n)_{n \geq 0}$ est de même nature que la série $(\sum_{n \geq 0} u_n)$.

Exercice 7. On considère la suite donnée par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sin(u_n)$ pour $n \geq 1$.

- Montrer que la suite $(u_n)_n$ est strictement décroissante et converge vers 0.
- Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} [(\sin x)^{-2} - x^{-2}] = \frac{1}{3}$.
- En déduire un équivalent de $v_n = u_{n+1}^{-2} - u_n^{-2}$ quand $n \rightarrow \infty$.
- En étudiant la série $(\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n)$, montrer que $u_n \sim \sqrt{3/n}$.

Exercice 8.

- a. On pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, $u_n = H_n - \ln(n)$ et $v_n = \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$.
- (i) Montrer que la série $(\sum_{n \geq 1} v_{n+1} - v_n)$ converge.
 - (ii) Montrer que $u_{n+1} - u_n \sim \frac{1}{2}(v_{n+1} - v_n)$.
 - (iii) Montrer que la série $(\sum_{n \geq 1} u_{n+1} - u_n)$ converge.
 - (iv) En déduire l'existence d'une constante γ telle que $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$.
Ce nombre γ est appelé constante d'Euler.
 - (v) En utilisant l'équivalence des restes, montrer que $H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})$.
- b. On pose $A_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}$.
- (i) Vérifier par récurrence que $A_{2n} = H_n - H_{2n}$.
 - (ii) En déduire que $\lim A_{2n} = -\ln(2)$.
 - (iii) Montrer que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} = -\ln(2)$.

Exercice 9. On cherche à démontrer la *formule de De Moivre* : $n! \sim C\sqrt{n}(\frac{n}{e})^n$.

Pour cela, on va étudier la suite $u_n = \frac{n^n \sqrt{n}}{e^n n!}$. On pose $v_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$.

- a. Simplifier l'expression de v_n . En utilisant un $DL_3(0)$ de $\ln(1+x)$, établir que $v_n \sim \frac{1}{12n^2}$.
- b. Montrer que la série $(\sum v_n)$ converge.
- c. En déduire que $(u_n)_n$ converge vers une limite C non nulle. Conclure.

La valeur $C = \sqrt{2\pi}$ dans la formule de De Moivre a été déterminée par Stirling.

Exercice 10.

- a. Étudier les variations de la fonction définie pour $x > 1$ par $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$.
On note $S_n = \sum_{k=3}^{n-1} \frac{1}{k \ln k}$ pour $n \geq 4$.
- b. Montrer que pour tout $n \geq 4$, $\int_3^n f(x)dx \leq S_n \leq \int_2^{n-1} f(x)dx$.
- c. Calculer $\int_3^a \frac{dx}{x \ln x}$ pour $a \geq 3$.
- d. En déduire que la série $(\sum_{k \geq 3} \frac{1}{k \ln k})$ diverge et donner un équivalent de la suite de ses sommes partielles.

Exercice 11. Pour $s > 1$, on note $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$.

- a. Montrer que pour $k \geq 1$, $\int_k^{k+1} \frac{1}{t^s} dt \leq \frac{1}{k^s}$ et pour $k \geq 2$, $\frac{1}{k^s} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t^s} dt$.
- b. En déduire un encadrement pour $\zeta(s)$.
- c. Montrer que $\zeta(s) \sim_1 \frac{1}{s-1}$.
- d. Montrer que $\sum_{n=m}^{\infty} n^{-s} \sim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{s-1} m^{1-s}$.

On peut montrer qu'on a plus précisément $\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + o(1)$ où γ est la constante d'Euler.

Exercice 12. Étudier la nature des séries données par les termes généraux suivants :

$$a_n = (-1)^n \frac{\ln n}{n}, \quad b_n = \frac{(-1)^n}{2n + (-1)^n}, \quad c_n = \sin\left(\frac{(-1)^n}{n}\right), \quad d_n = \sin\left(\frac{\pi n^2}{n+1}\right),$$

$$e_n = \frac{(-1)^n}{n^2 - \ln(n)}, \quad f_n = \frac{\cos(n)}{n^3}, \quad g_n = 2^{-n}(4 \cos(n) - 3).$$

Exercice 13. On considère la série de terme général $u_n = (-1)^n \int_0^1 \frac{e^{-nt}}{1+t^2} dt$ pour $n \geq 0$.

- a. Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = 0$ en minorant $1+t^2$ dans l'intégrale.
- b. Montrer que la série $(\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n)$ converge.

Exercice 14. On considère la série de terme général $t_n = \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n \ln n}$ pour $n \geq 1$.

- a. La série $(\sum t_n)$ est-elle absolument convergente ?
- b. Montrer que $t_n = \frac{(-1)^n}{n} - \frac{\ln n}{n^2} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)$. On pose $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Déterminer un équivalent de $t_n - u_n$.
- c. Montrer que la série $(\sum t_n)$ converge.

Exercice 15. En procédant comme à l'exercice précédent, étudier la nature de la série $(\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n})$.

Exercice 16. On admet que la somme de la série alternée $(\sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{2k+1})$ vaut $\frac{\pi}{4}$. On note s_n les sommes partielles de cette série.

- Déterminer des entiers n pour lesquels $|\frac{\pi}{4} - s_n| < 10^{-3}$.
- Montrer que la série $(\sum_k (-1)^k \frac{1}{(2k+1)(2k+3)})$ converge et que

$$\frac{\pi}{4} - \frac{s_n + s_{n+1}}{2} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)(2k+3)}.$$

- En déduire une valeur approchée rationnelle de $\frac{\pi}{4}$ à 10^{-3} près.

Exercice 17.

- Calculer le terme général du produit de Cauchy de la série $(\sum_{n \geq 0} 2^{-n})$ par elle-même.
- En déduire la valeur de $S = \sum_{n=0}^{\infty} n 2^{-n}$.

Exercice 18. On note pour $n \geq 0$, $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$.

- Quelle est la nature de la série $(\sum_{n \geq 1} u_n)$?
- Déterminer le minimum de la fonction $x \mapsto (x+1)(n+1-x)$ sur $[0, n]$ pour $n \geq 0$.
- En déduire que le produit de Cauchy de la série $(\sum u_n)$ par elle-même ne converge pas.