

INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES

Exercice 1. Étudier la convergence des intégrales des fonctions suivantes sur les intervalles précisés :

- $a : x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{\ln x}$ entre 0 et $+\infty$,
- $b : x \mapsto \frac{(\ln x)^2}{\sqrt{x}}$ entre 1 et $+\infty$,
- $c : x \mapsto \frac{1}{x \ln x}$ entre 2 et $+\infty$,
- $d : x \mapsto \sqrt{x} \ln(x)$ entre 0 et 1,
- $e : x \mapsto \frac{1}{x^2 \ln x}$ entre 0 et $\frac{1}{2}$,
- $f : x \mapsto \ln(2x)$ entre 0 et 1,
- $g : x \mapsto \frac{1}{(x-1)\sqrt{x-1}}$ entre 1 et 2,
- $h : x \mapsto \exp(-3x)$ entre 0 et $+\infty$,
- $i : x \mapsto \exp(-2 \ln x)$ entre 1 et $+\infty$,
- $j : x \mapsto \frac{x}{(\ln x)^2}$ entre 0 et $+\infty$.

Exercice 2. Étudier la convergence des intégrales des fonctions suivantes sur les intervalles précisés :

- $a : x \mapsto \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x^3-1}}$ sur $[1, +\infty[$,
- $b : x \mapsto \frac{\ln x}{\sqrt{x^3+x^2+1}}$ sur $[1, +\infty[$,
- $c : x \mapsto \arctan e^{-x}$ sur $[0, +\infty[$,
- $d : x \mapsto \frac{\arctan x}{x \ln(1+x^2)}$ sur $[1, +\infty[$,
- $e : x \mapsto \sqrt{\ln(x+1)} - \sqrt{\ln x}$ sur $[1, +\infty[$,
- $f : x \mapsto x + 1 - \sqrt{x^2 + 2x}$ sur $[1, +\infty[$,
- $g : x \mapsto \frac{\cos x}{\sqrt{x+x^2}}$ sur $]0, 1]$,
- $h : x \mapsto \frac{1}{e^x - \cos x}$ sur $]0, 1]$,
- $i : x \mapsto \frac{1}{1-\sqrt{x}}$ sur $[0, 1[$,
- $j : x \mapsto 1 + x \ln(\frac{x}{x+1})$ sur $]0, +\infty[$.

Exercice 3. Étudier la convergence des intégrales des fonctions suivantes sur les intervalles précisés :

- $a : x \mapsto \sqrt{-\ln x}$ sur $]0, 1]$,
- $b : x \mapsto x^2 \exp(-x)$ sur $[0, +\infty[$,
- $c : x \mapsto x(\sin x)e^{-x}$ sur $[0, +\infty[$,
- $d : x \mapsto \exp(-\sqrt{\ln x})$ sur $[1, +\infty[$,
- $e : x \mapsto x \exp(-\sqrt{x})$ sur $[0, +\infty[$,
- $f : x \mapsto \exp(-x \arctan x)$ sur $[0, +\infty[$,
- $g : x \mapsto \frac{x \ln x}{(\ln x)^x}$ sur $[2, +\infty[$,
- $h : x \mapsto (\operatorname{ch} \sqrt{\ln x})^{-2}$ sur $[2, +\infty[$.

Exercice 4. Étudier la convergence des intégrales des fonctions suivantes sur les intervalles précisés :

- $a : x \mapsto \sin(x^2)e^{-2x}$ sur $[0, +\infty[$,
- $b : x \mapsto \frac{\cos x}{x\sqrt{x}}$ sur $[1, +\infty[$,
- $c : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}} \sin(\frac{1}{x})$ sur $]0, 1]$,
- $d : x \mapsto \frac{1}{x} \sin(x) \sin(\frac{1}{x})$ sur $[1, +\infty[$,
- $e : x \mapsto \frac{\sin(1+x^2)}{1+x^2}$ sur $[0, +\infty[$,
- $f : x \mapsto \sin(\ln x)$ sur $]0, +\infty[$.

Exercice 5. Discuter, suivant la valeur du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergence des intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{+\infty} x^\alpha \arctan(x) dx, \quad J = \int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^\alpha} dx, \quad K = \int_0^{+\infty} x^\alpha \ln(x + e^{\alpha x}) dx.$$

Exercice 6. Calculer les intégrales suivantes, après avoir justifié leur convergence :

$$I = \int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x}} dx, \quad J = \int_0^{+\infty} x e^{-\sqrt{x}} dx, \quad K = \int_0^1 \frac{x \ln x}{(x^2+1)^2} dx, \quad L = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} dx.$$

Exercice 7. Pour tout $a > 0$ on pose $I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{a^2 + x^2} dx$.

- a. Justifier l'existence de $I(a)$ pour tout $a > 0$.
- b. En effectuant le changement de variable $x = 1/y$, montrer que $I(1) = 0$.
- c. En effectuant le changement de variable $x = ay$, déterminer la valeur de $I(a)$ pour tout $a > 0$.

Exercice 8.

- Montrer que l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} dt$ converge. Quelle est la nature de $I_1 = \int_0^1 \frac{t}{\ln t} dt$ et $I_2 = \int_0^1 \frac{1}{\ln t} dt$?
- Montrer que pour tout $x \in]0, 1[$ on a $\int_0^x \frac{t dt}{\ln t} = \int_0^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$.
- En déduire que $\lim_{x \rightarrow 1} \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t} = I$.
- Montrer grâce à un DL que la fonction $g : x \mapsto \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}$ définie sur $]0, 1[$ a une limite en $x = 1$.
- En déduire que $\lim_{x \rightarrow 1} \int_x^{x^2} g(t) dt = 0$. On pourra écrire $\int_x^{x^2} g(t) dt = \int_{\frac{1}{2}}^{x^2} g(t) dt - \int_{\frac{1}{2}}^x g(t) dt$.
- Pour $x \in]0, 1[$, calculer $\int_x^{x^2} \frac{dt}{t-1}$.
- En déduire la valeur de I .

Exercice 9. Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue et $0 < a < b < +\infty$. On suppose que l'intégrale de $f(t)/t$ converge en $+\infty$.

- Justifier l'existence des intégrales suivantes, pour $x > 0$:

$$I(x) = \int_{xa}^{xb} \frac{f(t)}{t} dt, \quad J(x) = \int_x^{+\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t} dt.$$

- On suppose que $f(0) = 0$ et on fixe $\epsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $|f(x)| \leq \epsilon$ pour tout $x \in [0, \alpha]$.
En déduire qu'il existe $\beta > 0$ tel que $|I(x)| \leq \ln(b/a)\epsilon$ pour tout $x \in [0, \beta]$.
- Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} I(x) = \ln(b/a)f(0)$. On commencera par le cas $f(0) = 0$.
- Montrer que $I(x) = J(x)$ pour tout $x > 0$.
- Démontrer la convergence de l'intégrale suivante et donner sa valeur :

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t} dt.$$

Exercice 10. On cherche à calculer l'intégrale de Gauss $G = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

- On rappelle qu'on a $e^t \geq 1 + t$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\forall u \in [0, n] \quad \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n \leq e^{-u} \quad \text{et} \quad \forall u \geq 0 \quad e^{-u} \leq \left(1 + \frac{u}{n}\right)^{-n}.$$

- Démontrer qu'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx \leq G \leq \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} dx.$$

On appelle I_n, J_n les intégrales aux membres de gauche et de droite.

- Grâce à des changements de variables appropriés, relier I_n et J_n aux intégrales de Wallis $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^n dx$.
- On rappelle que $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$. Montrer que $G = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 11.

On considère les fonctions $g, h : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ données par les formules suivantes :

$$g(t) = e^{-t^2}, \quad h(t) = \frac{1}{2t} e^{-t^2}.$$

- Montrer que l'intégrale de g entre 1 et $+\infty$ converge.

On note alors $G(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$, pour tout $x \geq 1$.

- Montrer que $G(1) - G(x) = \int_1^x e^{-t^2} dt$. En déduire la limite de $G(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
- Montrer grâce à une IPP que $G(x) = h(x) - \int_x^{+\infty} \frac{1}{2t^2} g(t) dt$, pour tout $x \geq 1$.
- Montrer que pour tout $x \geq 1$ on a $\left| \int_x^{+\infty} \frac{1}{2t^2} g(t) dt \right| \leq \frac{1}{2x^2} G(x)$.
- Montrer que $G(x) \sim h(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 12. On note $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

On se propose de retrouver l'équivalent $H_n \sim \ln(n)$ à l'aide d'une comparaison série-intégrale.

- Montrer que pour tout $k > 1$ on a $\int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{dx}{x}$.
- En déduire que $\int_2^{n+1} \frac{dx}{x} \leq H_n - 1 \leq \int_1^n \frac{dx}{x}$.
- Conclure.