

ANALYSE DANS $\mathbb{R}^n$

Exercice 1. Calculer les limites des suites suivantes dans $\mathbb{R}^2$ ou $M_2(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^4$, lorsqu'elles existent :

$$P_n = \frac{1}{n}(\ln(1+n), 1+n), \quad Q_n = n(e^{-n}, (-1)^n), \quad R_n = (\sqrt{n+1}, n+1) - (\sqrt{n}, n),$$

$$A_n = \begin{pmatrix} n^{-1} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B_n = \begin{pmatrix} n^{-1} & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_n = A_n B_n A_n^{-1}.$$

Exercice 2. Déterminer et représenter graphiquement les ensembles de définition des fonctions suivantes :

$$f : (x, y) \mapsto \frac{1}{x^2 + y^2}; \quad g : (x, y) \mapsto \frac{1}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}; \quad h : (x, y) \mapsto \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - y^2}};$$

$$i : (x, y) \mapsto \frac{1}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - y^2)}}; \quad j : (x, y) \mapsto 2 + \sqrt{-(x - y)^2}; \quad k : (x, y) \mapsto \ln(x^2 - y).$$

Exercice 3. On rappelle qu'une fonction polynomiale $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, et que la composée, la somme et le produit de deux fonctions continues sont continus. Montrer que les fonctions suivantes sont continues sur $\mathbb{R}^2$:

$$f : (x, y) \mapsto xy + 2x^2y^2 - y^3, \quad g : (x, y) \mapsto \sin(x) + x^2,$$

$$h : (x, y) \mapsto \cos(xy^2) + \exp(2xy^2), \quad i : (x, y) \mapsto \ln(2 + x^2 + y^2) + \exp(xy),$$

$$j : (x, y) \mapsto \cos(x) \sin(y^2).$$

Exercice 4. On considère les fonctions $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définies par $f(0, 0) = g(0, 0) = 0$ et les formules suivantes :

$$f(x, y) = \frac{2xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad g(x, y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} \quad \text{si } (x, y) \neq (0, 0).$$

- Montrer que f et g sont continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
- Démontrer l'inégalité $xy \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- Trouver des constantes $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ telles qu'on ait $|f(x, y)| \leq \|(x, y)\|^\alpha$, $|g(x, y)| \leq \|(x, y)\|^\beta$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- En déduire que f et g sont continues en $(0, 0)$, à l'aide de la définition.

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x, y) = \frac{x^2y}{x^4 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$.

L'application f est-elle continue en $(0, 0)$? On pourra calculer $f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2})$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
Qu'en est-il si on pose $f(0, 0) = \frac{1}{2}$ au lieu de 0?

Exercice 6. On considère les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1\}, \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - x^2 = 1\},$$

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - x^2 \leq 1 \text{ et } x^2 + y^2 < 2\}, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sin(x^2 + y^2) \geq 0\},$$

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0 \text{ et } y = \frac{1}{x^2}\}, \quad F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 - xy > 0\},$$

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 1, y \leq 2 \text{ et } x - y > 0\}, \quad H = \{(\cos t, \sin t) \mid t \in \mathbb{R}\},$$

$$I = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(1, 0)\}, \quad J = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 1 + x^2 \text{ et } y > 1\},$$

$$K = ([2, 3] \cup \{0\}) \times [-1, 1], \quad L = \mathbb{Z} \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}).$$

- Représenter chacun de ces sous-ensembles dans $\mathbb{R}^2$.
- Les exprimer à l'aide d'images réciproques d'intervalles de $\mathbb{R}$ (sauf I).
Lorsque c'est possible, en déduire s'ils sont ouverts ou fermés.
- Pour les sous-ensembles restant, conclure à l'aide de suites convergentes.

Exercice 7.

- Soit $M = \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Calculer $\det(M)$, $\text{Tr}(M)$ en fonction de w, x, y, z .
Montrer que les applications $\det, \text{Tr} : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ sont continues.
- Soit $GL_2(\mathbb{R}) \subset M_2(\mathbb{R})$ le sous-ensemble des matrices inversibles. Montrer que $GL_2(\mathbb{R})$ est ouvert dans $M_2(\mathbb{R})$.
Trouver des matrices $M_n \in GL_2(\mathbb{R})$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. En déduire que $GL_2(\mathbb{R})$ n'est pas fermé.
- Montrer que l'ensemble des matrices antisymétriques $A_2(\mathbb{R}) = \{M \in M_2(\mathbb{R}) \mid A = -{}^tA\}$ est fermé dans $M_2(\mathbb{R})$.
Montrer à l'aide d'une suite de matrices qu'il n'est pas ouvert.