Roland Vergnioux
Graphes de Cayley pour les groupes quantiques discrets
Caen, 9 avril 2003

0. Introduction : la première moitié de l'exposé sera consacrée à des rappels sur les groupes quantiques discrets et les graphes de Cayley. On expliquera alors les motivations aux constructions et résultats de la deuxième partie, qui portera sur l'introduction et l'étude des graphes de Cayley quantiques, notamment dans le cas des arbres. Voici le plan détaillé :
   (a) Rappels
      – groupes quantiques compacts
      – le cas co-commutatif
      – groupes quantiques libres
      – graphe de Cayley (groupes discrets)
   (b) Graphes de Cayley quantiques
      – graphe de Cayley (groupe quantiques discrets)
      – orientation (cas des arbres)
      – opérateur de Julg-Valette
      – espace H_∞ pour $A_o(Q)$
1. Groupes quantiques compacts
   – On a (au moins) trois cadres axiomatiques pour la théorie des groupes quantiques compacts, due initialement à Woronowicz. La formulation la plus simple se fait en termes de C^*-algèbres : les objets étudiés sont les C^*-algèbres de Woronowicz, c'est à dire les C^*-algèbres de Hopf unifères et bisimplifiables.
   – La théorie des représentations des groupes compacts se généralise avec la notion de coreprésentation des groupes quantiques compacts. On a une définition très simple en dimension finie : rappeler la notation des indices pour les produits tensoriels. La théorie est tout-à-fait analogue à celle des groupes compacts : on a des notions de morphisme d'entrelacement, somme directe, produit tensoriel, conjugaison. On notera $\mathcal{C}$ la catégorie des coreprésentations de dimension finie de (S, δ). On a un théorème de Peter-Weyl dans ce cadre : les coreprésentations se décomposent en sommes directes de coreprésentations irréductibles. On notera Irr $\mathcal{C}$ un système complet de représentants des coreprésentations irréductibles. Les éléments de Irr $\mathcal{C}$ qui sont de dimension 1 sont appelés caractères et forment un groupe (pour la loi induite par le produit tensoriel). Exemple : si S est l'algèbre des fonctions sur un groupe compact abélien, le groupe des caractères est un groupe discret abélien, et on obtient ainsi tous les groupes discrets abéliens (dualité de Pontrjagin).
   – Plusieurs objets hilbertiens interviennent également dans la théorie. Un résultat central est l'existence d'un état de Haar pour (S, δ). On note H l'espace L^2 correspondant, et λ la représentation GNS de S sur H. Cette dernière n'est pas fidèle en général, on note S_r son image : c'est la version « réduite » de S (le coproduit de S passe au quotient). On a une décomposition de H en sous-espaces de dimension finie associés aux éléments de Irr $\mathcal{C}$, on notera p_r les projecteurs orthogonaux correspondants. Enfin, d'autres objets hilbertiens permettent de décrire entièrement le groupe quantique compact considéré, pour former le système de Kac (H, V, U) associé à (S, δ). On se contentera ici d'expliquer à quoi correspondent ces objets dans le cas des groupes discrets.
2. Le cas co-commutatif
   – On explique maintenant comment associer à un groupe discret quelconque (non abélien) un groupe quantique compact, que l'on peut considérer comme son dual

de Pontrjagin généralisé. Soit Γ un groupe discret, on note $\mathbb{C}\Gamma$ l'algèbre involutive associée. En tant qu'espace vectoriel, une base en est donnée par les éléments de Γ. La structure d'algèbre involutive est donnée, sur cette base, par la loi de Γ et l'inverse de Γ. Il y a diverse manière de compléter cette algèbre involutive en une C^*-algèbre : on notera $C^*\Gamma$ la complétion « universelle » ou « pleine », au sens où toutes les représentation unitaires de Γ s'étendent en une représentation de $C^*\Gamma$. La norme correspondante peut être donnée par la formule $||a|| = \mathrm{Sup}_\pi \ ||\pi(a)||_{L(H_\pi)}$, où on étend les représentations unitaires π de Γ à $\mathbb{C}\Gamma$ entier, par linéarité. On fait de $C^*\Gamma$ une C^*-algèbre de Woronowicz en définissant le coproduit par une formule très simple sur la base canonique de $\mathbb{C}\Gamma$.

- On peut alors décrire les objets de la théorie en fonction de Γ. Le groupe des caractères forme un système complet de représentants des coreprésentations irréductibles, et il s'identifie au groupe Γ lui-même : en passant des groupes compacts aux groupes quantiques compacts, on permet aux groupes de caractères de devenir non abéliens. L'espace de Hilbert H s'identifie à $\ell^2(\Gamma)$, et λ est appelée représentation régulière de Γ : elle provient de l'action par translation à gauche de Γ sur lui-même. La C^*-algèbre $C^*_r\Gamma := S_r$ est une autre complétion importante de $\mathbb{C}\Gamma$, dite « réduite » : elle est donnée par la norme $||a||_r = ||\lambda(a)||_{L(H)}$. Les sous-espaces $p_r(H)$, pour $r \in \Gamma$, sont les droites engendrées par les fonctions caractéristiques des points de Γ. Enfin, les unitaires U et V sont donnés par des formules simples en fonction de la structure du groupe Γ (noter que $H \otimes H \simeq \ell^2(\Gamma \times \Gamma)$).
- Dans le cas général d'un groupe quantique compact, on considérera donc dans la suite S comme la C^*-algèbre pleine d'un groupe quantique discret. Parfois il sera utile de penser aux éléments $r \in \mathrm{Irr}\,\mathcal{C}$ comme aux « points » de ce groupe quantique discret. Si $\mathcal{D}$ est une partie de $\mathrm{Irr}\,\mathcal{C}$, le projecteur somme des p_r pour $r \in \mathcal{D}$ est l'analogue quantique du projecteur sur le sous-espace $\ell^2(\mathcal{D}) \subset \ell^2(\Gamma)$ (écrire cette inclusion).

3. Groupes quantiques libres
   - Le groupe libre F_n est engendré par n générateurs sans relations, sa C^*-algèbre pleine est donc la C^*-algèbre engendrée par n générateurs u_i et les relations « minimales », ie celles qui rendent les u_i unitaires. Je vous laisse imaginer ce que peut être une C^*-algèbre engendrée par des générateurs et des relations, le point important est que les relations doivent imposer une borne aux générateurs. Les C^*-algèbres de Woronowicz « libres » sont définies de même par des générateurs et des relations « minimales ».
   - Groupe quantique libre $A_u(Q)$: les n^2 générateurs u_{ij} forment une matrice u et on demande qu'elle soit unitaire, ainsi que la matrice conjuguée $\bar{u}$ (dans le cadre non commutatif la première condition n'implique pas la deuxième). On peut introduire un paramètre $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ pour déformer la deuxième condition. On obtient ainsi une C^*-algèbre de Woronowicz, avec un coproduit tel que u soit une coreprésentation de $A_u(Q)$ (Wang, van Daele). On a une version « orthogonale », $A_o(Q)$, pour laquelle on demande que $Q\bar{u}Q^{-1}$ soit égale à u.
   - La théorie des coreprésentations a été étudiée par Banica. Pour $A_u(Q)$, on peut indexer $\mathrm{Irr}\,\mathcal{C}$ par les mots en u et $\bar{u}$, de manière à avoir les règles de fusion et de conjugaison indiquées sur le transparent. Pour $A_o(Q)$, si on suppose que $Q\bar{Q}$ est scalaire, on peut indexer $\mathrm{Irr}\,\mathcal{C}$ par $\mathbb{N}$ de manière à avoir les même règles de fusion et de conjugaison que pour $SU(2)$. Notons d'ailleurs que dans le cas $n = 2$ on retrouve les groupes quantiques compact $SU_q(2)$ de Woronowicz.

4. Graphes de Cayley classiques
   - Énumérer les données. Δ s'interprète comme l'ensemble des directions suivies par les arêtes. On a deux visions équivalentes. Dans les deux cas l'ensemble des sommets

est Γ lui-même.

- Vision simpliciale : une arête est un couple (r, r') de sommets tel que $r' = rs$ pour un certain $s \in \Delta$. On peut retourner les arêtes, et on dispose donc des notions d'orientation et d'arêtes géométriques.
- Vision « origine + direction » : une arête est simplement la donnée d'un point de départ dans Γ et d'une direction dans Δ. On retrouve la vision précédente grâce à des applications origine et but. L'application de retournement se lit de manière particulière dans cette nouvelle formulation.
- Exemple : graphe de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, de F_2 (figure). Arêtes sans flèches : géométriques. Sur l'arbre du groupe libre on a mis une flèche sur chaque arête géométrique pour obtenir l'orientation « montante » de l'arbre relativement à l'origine e : les arêtes orientées s'éloignent de cette origine.

0. Motivations
   - Je vais expliquer rapidement comment la situation géométrique, très simple, de l'arbre du groupe libre, donne lieu à une construction intéressante pour l'étude du groupe libre, et plus particulièrement de la K-théorie de ses C^*-algèbres. Ce n'est pas du tout l'objet de l'énoncé de parler de KK-théorie, mais je vais quand même dire deux mots de la démarche. Si un groupe discret Γ agit sur deux C^*-algèbres A et B, $KK_\Gamma(A, B)$ est un groupe abélien, invariant par homotopie G-équivariante, qui contient des informations intéressantes sur A, B et le groupe Γ (par exemple sur les séries discrètes). On dispose de nombreux outils pour étudier ce groupe, et notamment du produit de Kasparov, de $KK_\Gamma(A, D) \times KK_\Gamma(D, B)$ dans $KK_\Gamma(A, B)$. Ainsi un simple élément de KK-théorie induit des morphismes entre groupes de KK-théorie. Une démarche fréquente est alors la construction d'éléments particulièrement intéressants de ce point de vue, par exemple pour obtenir des isomorphismes. Cela se fait souvent par des méthodes géométriques, comme celle que je vais vous décrire maintenant.
   - On procède comme suit : étend donnée une arête géométrique, on choisit l'orientation qui s'éloigne de l'origine, puis on prend le sommet but pour cette orientation. Cela revient à choisir pour chaque arête géométrique le sommet le plus éloigné de l'origine. Il est évident que cela définit une application injective qui atteint tous les sommets sauf l'origine. En outre le groupe libre agit sur son graphe de Cayley par translation à gauche : en fait l'action d'un élément du groupe libre sur l'arbre équivaut à un changement d'origine dans cet arbre. Cela ne modifie l'application précédemment décrite que sur les arêtes qui relient l'ancienne origine à la nouvelle, or ces arêtes sont en nombre fini. Si on se place au niveau ℓ^2, on a ainsi obtenu un opérateur F_g^* de l'espace ℓ^2 des arêtes géométriques vers l'espace ℓ^2 des sommets, qui est injectif, dont l'image est de codimension 1, et qui commute à l'action du groupe libre modulo des opérateurs compacts. C'est exactement ce qu'il faut pour définir un élément $\gamma \in KK_{F_n}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$.
   - Dans la suite de l'exposé, on va définir la notion de graphe de Cayley pour les groupes quantiques discrets, construire l'opérateur de Julg-Valette correspondant dans le cas des groupes quantiques libres, puis l'utiliser pour définir un élément de KK-théorie γ pour les groupes quantiques libres. Notons que dans le cas classique l'élément γ précédemment décrit se généralise à d'autres groupes discrets, il intervient alors dans la preuve de la conjecture de Baum-Connes pour ces groupes. Par ailleurs les graphes de Cayley sont des objets qui ont un intérêt propre, par exemple en lien avec la notion de groupe hyperbolique.

5. Graphes de Cayley quantiques
   - Les données : groupes quantiques discrets (divers objets associés), projecteur central de $\hat{S}$ qui s'écrit comme somme de projecteurs centraux minimaux p_r sur un

sous-ensemble fini $\mathcal{D}$ de $\mathcal{C}$. Conditions sur p_1 analogues de celles sur Δ.

- On généralise la version simpliciale du graphe de Cayley de manière naïve. On obtient un graphe classique, en remplaçant l'égalité $r' = rs$ par une inclusion $r' \subset r \otimes s$. Grâce à la dualité de Jacobi, on a une application de retournement bien définie, on peut donc parler d'orientation et d'arêtes géométriques. Spécificités quantiques : on peut avoir $r' \subset r \otimes s$ et $r' \subset r \otimes s'$, avec de la multiplicité. Pour garder une trace de ces phénomènes, on munit les arêtes d'une couleur (à valeurs dans Δ) et d'une multiplicité.
- On généralise la vision « origine + direction » au niveau des espaces ℓ_2, dans l'esprit de la géométrie non commutative. Le sous-espace $p_1 H$ est la somme des $p_r H$ avec $r \in \mathcal{D}$ et s'interprète comme l'espace ℓ_2 des directions : on pose $K = H \otimes p_1 H$. On définit un opérateur de retournement des arêtes par la formule indiquée sur le transparent, qui est en fait une généralisation naturelle de la formule algébrique $\Theta(f)(r,s) = f(rs, s^{-1})$. Une fois Θ défini, on dispose d'un sous-espace des arêtes géométriques naturel K_g, qui est le noyau de $\Theta - \mathbf{id}$. A la différence du cas classique, Θ n'est plus involutif en général, ce qui signifie que lorsqu'on retourne deux fois une arête on ne retombe pas forcément sur l'arête de départ. C'est la principale nouveauté du cas quantique, comme on le verra dans la suite.
- Par ailleurs le rôle de l'opérateur extrêmités, ie du couple (origine, but), est joué par l'unitaire multiplicatif V lui-même. On en déduit des opérateurs origine et but en tuant une des deux composantes à l'arrivée à l'aide d'une forme linéaire naturelle ϵ. Dans le cas d'un groupe discret on retrouve son gaphe de Cayley, vu au niveau des espaces ℓ^2, et dans le cas général B, O et Θ vérifient des relations analogues à celles du cas classique.
- Le graphe quantique est muni de représentations du groupe quantique discret. Par définition, S_r agit sur H, et on la fait agir sur le premier facteur de K. Alors Θ, O et B commutent à S_r, et en particulier S_r agit sur K_g. Ce sont ces actions qui font du graphe quantique l'objet le plus intéressant pour la KK-théorie. Le graphe classique servira plutôt d'auxiliaire pour l'étude du graphe quantique.
- Exemple : graphe classique de $A_u(Q)$, $A_o(Q)$ (figure).

6. Orientation (cas des arbres)
   - On suppose maintenant que le graphe classique associé à (V, p_1) est un arbre, et on choisit la représentation triviale $1_{\mathcal{C}}$ comme origine. On appelle $\mathfrak{a}_+$ l'orientation des « arêtes montantes », ie des arêtes qui s'éloignent de l'origine. On suppose de plus que les arêtes n'ont pas de multiplicité, et que les arêtes montantes issues d'un sommet sont de couleurs différentes.
   - On souhaite définir l'analogue du sous-espace des arêtes montantes dans l'espace des arêtes quantiques. Pour ce faire, on pense au projecteur p_r comme au projecteur « sur le point r » dans l'espace ℓ^2 des sommets. En sommant sur les points r à distance k de l'origine du graphe classique, on obtient le projecteur p_k sur le sous-espace quantique « des sommets à distance k de l'origine ». Pour obtenir un candidat pour le projecteur sur le sous-espace des arêtes montantes, on somme les projecteurs $p_r \otimes p_{r'}$ avec $(r, r') \in \mathfrak{a}_+$, puis on conjugue par l'opérateur extrêmités V pour revenir dans la vision « origine + direction ». On appelle $p_{\star +}$ ce projecteur, et $p_{\star -}$ son complémentaire (arêtes descendantes).
   - Quand on retourne le projecteur sur les arêtes descendantes, on obtient un nouveau projecteur, différent de $p_{\star +}$. On l'appelle $p_{+\star}$. Par ailleurs on a une relation entre Θ et $p_{+\star}$ (resp. entre Θ^* et $p_{\star +}$) qui correspond au fait que lorsqu'on retourne une arête montante démarrant à distance k de l'origine, on obtient une arête descendante démarrant à distance $k+1$ de l'origine.
   - Finalement on choisit comme projecteur p_{++} sur les arêtes montantes le produit

de $p_{+\star}$ et $p_{+\star}$, et on note K_{++} son image. De même on note $p_{+-} = p_{+\star}p_{\star-}$, qui correspond en quelque sorte à des arêtes à la fois montantes et descendantes. Dans le cas classique p_{+-} et p_{-+} sont nuls.

7. Opérateur de Julg-Valette
   - On définit l'opérateur de Julg-Valette par analogie avec le cas classique : choix de l'orientation montante, puis but de l'arête orientée obtenue. La principale question pour la suite de l'exposé sera de déterminer si F_g^* est un opérateur de Fredholm, c'est-à-dire si son noyau et sa co-image sont de dimension finie.
   - On obtient dans un premier temps les résultats énoncés dans le théorème. Pour la « seconde étape » de l'opérateur de Julg-Valette (prendre le but des arêtes montantes), tout se passe comme dans le cas classique : la restriction de B à K_{++} est injective et atteint tout l'espace des sommets, sauf la droite correspondant à l'origine du graphe. Pour la première étape (choix de l'orientation montante), les choses sont plus compliquées : on a à nouveau l'injectivité, mais on n'obtient qu'une expression relativement compliquée pour $p_{++}K_g$.
   - Pour rendre ce résultat utilisable, il faut étudier plus en détail les opérateurs $p_{+-}\Theta p_{++}$ et $p_{+-}\Theta p_{+-}$. Notons que $p_{+-}\Theta p_{+-}$ agit comme une sorte de shift sur l'espace des arêtes : d'après le lien entre les projecteurs d'orientation et l'opérateur de retournement fait au transparent précédent, il envoie $(p_k \otimes p_1)K$ sur $(p_{k+1} \otimes p_1)K$, pour tout k. Cependant c'est a priori un shift avec des poids, sur lesquels on n'a pour l'instant aucun renseignement.
   - Pour pouvoir faire des calculs plus précis, on va se placer dans le cas du groupe quantique libre orthogonal $A_o(Q)$. En fait on peut voir que c'est le seul cas à étudier si on veut comprendre les particularités du cas quantique. On a notamment une proposition qui affirme que, sous les hypothèses faites sur le graphe de Cayley classique, le graphe quantique discret considéré est en fait un produit libre de groupes quantiques libres.
8. Espace H_∞ pour $A_o(Q)$
   - Au prix de calculs assez fins dans la catégorie des coreprésentations de dimension finie de $A_o(Q)$, on peut constater les poids du shift $p_{+-}\Theta p_{+-}(p_k \otimes \mathrm{id})$ tendent rapidement vers 1 lorsque k tend vers l'infini. Il est alors naturel d'introduire la limite inductive H_∞ des $(p_k \otimes \mathrm{id})K_{+-}$ relativement à ce shift. Notons que la dimension croît à chaque étage du système inductif, contrairement à ce qui se passe dans le cas classique, si bien que H_∞ est de dimension infinie.
   - On peut alors construire un opérateur borné et surjectif $R : K_{++} \to H_\infty$, de manière naturelle mais non explicitée ici, dont le noyau correspond exactement à $p_{++}K_g$. Autrement dit, son adjoint R^* est injectif et a pour image l'orthogonal de $p_{++}K_g$. Ainsi F_g^* a une image de codimension infinie (naturellement isomorphe à $H_\infty \oplus p_0 H$) : ce n'est pas un opérateur de Fredholm. Mais la proposition dit également ce qu'il faut faire pour remédier à cette situation : en rajoutant BR^* à F_g^*, on obtient un opérateur de Fredholm de $K_g \oplus H_\infty$ dans H.
   - Pour obtenir un élément de KK-théorie, il faut de plus étudier la commutation de cet opérateur aux représentations du groupe quantique discret, et en premier lieu définir une telle représentation sur l'espace H_∞ de manière naturelle. Cela dépasse le cadre de cet exposé. A nouveau, les choses se passent moins bien que dans le cas classique, mais on arrive finalement à établir les propriétés de commutation modulo les compacts qui permettent de définir un élément $\gamma \in KK_{\hat{S}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$.