Rigidité orbitale et cohomologie bornée, d'après Monod et Shalom

Roland Vergnioux

Introduction

L'objectif de cet exposé est de démontrer le théorème suivant :

Théorème 0.1 *Soit $\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2$ un produit cartésien de deux groupes libres non abéliens. Soit $\Lambda = \Lambda_1 \times \Lambda_2$ un produit cartésien de deux groupes sans torsion quelconques. Soit X un Γ-espace de probabilité libre quelconque, et Y un Γ-espace de probabilité libre tel que les actions $Y \circlearrowleft \Lambda_i$ sont ergodiques. Si les actions $X \circlearrowleft \Gamma$ et $Y \circlearrowleft \Lambda$ sont orbitalement équivalentes, alors il existe des isomorphismes $\Gamma_i \simeq \Lambda_i$ à permutation près de Λ_1 et Λ_2, et l'équivalence orbitale est induite par un isomorphisme des actions.*

On peut remplacer les groupes libres par des groupes bien plus généraux, vérifiant des conditions de « courbure négative ». En fait on a juste besoin d'avoir des groupes de cohomologie bornée $H_b^2(\Gamma_i, V_i)$ non nuls, avec V_i une représentation unitaire et c_0. Cela est vérifié en particulier par les groupes non élémentaires agissant proprement sur des espaces $CAT(-1)$ propres ou des graphes hyperboliques à valence bornée.

La preuve fait intervenir des méthodes de théorie ergodique et des outils de cohomologie bornée. En ce qui concerne la première catégorie on parlera notamment d'équivalence mesurable de groupes. En ce qui concerne la seconde, on a besoin d'une formule pour la cohomologie d'un produit cartésien, et d'un résultat d'injectivité pour l'application d'induction en cohomologie. La démonstration de ces résultats de cohomologie bornée utilise de manière essentielle l'existence d'une frontière forte pour les groupes considérés, qui est un résultat de théorie ergodique. Enfin, par des méthodes de théorie ergodique on peut transformer le théorème de rigidité forte énoncé ci-dessus en un théorème de superrigidité.

1 Équivalence mesurable et rigidité

Dans tout l'exposé les groupes considérés sont discrets et dénombrables. Si Γ agit sur deux espaces X et Y, alors on munit tout espace de fonctions de X vers Y de l'action « naturelle » donnée par $(\gamma f)(x) = \gamma f(\gamma^{-1}x)$, sauf précision contraire. On note par ailleurs X^Γ l'ensemble des points fixes de $X \circlearrowleft \Gamma$.

1.1 Ergodicité et équivalence orbitale

On adopte la terminologie suivante :

Définition 1.1 *Un Γ-espace $X \circlearrowleft \Gamma$ est un espace borélien standard muni d'une action mesurable de Γ et d'une mesure invariante et σ-finie. Un Γ-morphisme entre Γ-espaces est une application mesurable définie presque partout qui conserve la mesure et entrelace les actions. Un Γ-espace de probabilité est un Γ-espace de mesure 1. On dit que $X \circlearrowleft \Gamma$ est libre si l'action de Γ est essentiellement libre :* $\mathrm{Stab}_\Gamma(x) = \{1\}$ *presque partout. On dit que $X \circlearrowleft \Gamma$ est ergodique si $L^\infty(X)^\Gamma = \mathbb{C}$. On dit que $X \circlearrowleft \Gamma$ et $Y \circlearrowleft \Lambda$ sont orbitalement* *équivalents s'il existe un Γ-isomorphisme $F : X \to Y$ tel que $F(\Gamma x) = \Lambda F(x)$ presque partout ; une telle application F est alors appelée équivalence orbitale. On dit que $X \circlearrowleft \Gamma$ et $Y \circlearrowleft \Lambda$ sont isomorphes s'il existe des (Γ-)isomorphismes $\varphi : \Gamma \to \Lambda$ et $F : X \to Y$ tels que $F(\gamma x) = \varphi(\gamma)F(x)$ pour tout $\gamma \in \Gamma$ et presque tout $x \in X$.*

On a le résultat suivant, qui ne sera pas utilisé dans la suite : si $X \circlearrowleft \Gamma$, $Y \circlearrowleft \Gamma$ sont ergodiques et $F : X \to Y$ est un Γ-quasi-isomorphisme, alors f préserve automatique la mesure, donc est un isomorphisme. Nous aurons besoin du lemme suivant, dans lequel l'hypothèse de séparabilité — c'est-à-dire l'existence d'une famille dénombrable de boréliens qui sépare les points — est essentielle.

Lemme 1.2

1. *Soit X un Γ-espace ergodique et $\bar{Y}$ un espace mesurable séparable, muni de l'action triviale de Γ. Alors l'espace des classes de fonctions invariantes $\mathcal{L}(X, \bar{Y})^\Gamma$ est réduit aux classes de fonctions constantes.*
2. *Soit Y un espace topologique polonais sur lequel Γ agit continûment. Si les orbites de $Y \circlearrowleft \Gamma$ sont localement fermées alors l'espace mesurable quotient $\bar{Y}$ est séparable.*

DÉMONSTRATION.
1. Fixons une suite de boréliens de Y qui sépare les points, et soit $f_i : Y \to \{0, 1\}$ les fonctions caractéristiques correspondantes : l'application (f_i) réalise un isomorphisme mesurable entre Y et un borélien de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Maintenant, si $f : X \to Y \simeq \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ est invariante, ses composantes le sont aussi, donc chacune est constante presque partout. Comme une réunion dénombrable de boréliens négligeables est négligeable, f est constante presque partout.

2. Comme Y a une topologie à base dénombrable, c'est aussi le cas de $\bar{Y}$. Cependant $\bar{Y}$ n'est pas Haussdorf en général. On va montrer une propriété plus faible, qui suffit pour avoir le résultat recherché sur la structure borélienne : $\bar{Y}$ est T_0, c'est-à-dire que pour tous $\bar{y}_1 \neq \bar{y}_2 \in \bar{Y}$ il existe un ouvert $\bar{U} \subset \bar{Y}$ tel que $\bar{y}_1 \in \bar{U}$ et $\bar{y}_2 \notin \bar{U}$, à permutation de y_1 et y_2 près. Supposons que $\bar{y}_1$, $\bar{y}_2$ ne vérifient pas cette propriété : alors on a $\Gamma y_1 \subset \overline{\Gamma y_2}$ et $\Gamma y_2 \subset \overline{\Gamma y_1}$, donc Γy_1 est dense dans $\overline{\Gamma y_2}$. Mais par hypothèse Γy_2 est ouvert dans $\overline{\Gamma y_2}$, donc $\Gamma y_1 \cap \Gamma y_2 \neq \emptyset$, c'est-à-dire $\bar{y}_1 = \bar{y}_2$. ∎

Soit $X \circlearrowleft \Gamma$, $Y \circlearrowleft \Lambda$ des espaces de probabilité libres et orbitalement équivalents. Fixons une équivalence orbitale $F : X \to Y$. Pour presque tout $x \in X$ et tout $\gamma \in \Gamma$ il existe (OE) un unique (liberté) élément $\alpha(\gamma, x) \in \Lambda$ tel que $F(\gamma x) = \alpha(\gamma, x)F(x)$. Cela définit pp une application mesurable $\alpha : \Gamma \times X \to \Lambda$ qui vérifie la relation de cocyle $\alpha(\gamma\gamma', x) = \alpha(\gamma, \gamma' x)\alpha(\gamma', x)$.

On dit qu'une autre équivalence orbitale $F' : X \to Y$ est équivalente à F s'il existe une application $f : X \to \Lambda$ telle que $F'(x) = f(x)F(x)$ pp — c'est-à-dire que F et F' induisent essentiellement la même application de X/Γ vers Y/Λ. Les cocycles associés vérifient alors pp $\alpha'(\gamma, x) = f(\gamma x)\alpha(\gamma, x)f(x)^{-1}$: on dit qu'ils sont cohomologues. Inversement, si $f : X \to \Lambda$ est une application quelconque, le Γ-isomorphisme F' associé n'est pas en général une équivalence orbitale, mais seulement une équivalence orbitale faible. [*Existe-t-il des cocyles qui ne proviennent pas d'une équivalence orbitale faible ?*]

1.2 Équivalence mesurable et induction

La démonstration du théorème 0.1 utilise le langage des équivalences mesurables. Nous allons donc expliquer comment passer d'une équivalence orbitale d'actions à une équivalence mesurable de groupes, et comment démontrer l'isomorphisme des actions dans ce nouveau cadre. On peut faire le chemin inverse, mais on obtient alors des équivalences orbitales faibles — ce qui n'est pas grave : le théorème reste valide — et on perd la liberté des actions.

Fixons une équivalence orbitale $F : X \to Y$ entre deux Γ-espaces de probabilité libres. On note $\alpha : \Gamma\times X \to \Lambda$ le cocyle associé à F, et $\beta : \Lambda\times Y \to \Gamma$ celui associé à F^{-1}. On définit un $\Gamma\times\Lambda$-espace Z en posant $Z = X\times\Lambda$, $\gamma(x,\mu) = (\gamma x, \alpha(\gamma,x)\mu)$ et $\lambda(x,\mu) = (x,\mu\lambda^{-1})$. Alors, Z est un couplage mesurable entre Γ et Λ, au sens de la définition suivante :

Définition 1.3 *On dit que* Γ *et* Λ *sont équivalents en mesure s'il existe un* $\Gamma\times\Lambda$*-espace* Z *tel que les actions* $Z \circlearrowleft \Gamma$ *et* $Z \circlearrowleft \Lambda$ *admettent des domaines fondamentaux de mesure finie. Un tel* $\Gamma\times\Lambda$*-espace est appelé un couplage entre* Γ *et* Λ*. On dit que le couplage est ergodique si* $Z \circlearrowleft \Gamma\times\Lambda$ *est ergodique, ce qui est équivalent à l'ergodicité de* $Z/\Gamma \circlearrowleft \Lambda$ *ou* $Z/\Lambda \circlearrowleft \Gamma$.

Dans notre cas il est clair que $Z \circlearrowleft \Lambda$ admet un domaine fondamental $\tilde{X} = X\times\{1_\Lambda\}$. Pour voir que c'est également le cas de $Z \circlearrowleft \Gamma$, on explicite le fait que la situation est symétrique de la manière suivante : on a $Z \simeq Z' = Y\times\Lambda$ pour le $\Gamma\times\Lambda$-isomorphisme $\Theta : Z \to Z'$ et les actions $Z' \circlearrowleft \Gamma\times\Lambda$ donnés par

$$\Theta(x,\lambda) = (\lambda^{-1}F(x), \beta(\lambda^{-1}, F(x))), \quad \Theta^{-1}(y,\gamma) = (\gamma^{-1}F^{-1}(y), \alpha(\gamma^{-1}, F^{-1}(y)))$$
$$\gamma(y,\delta) = (y, \delta\gamma^{-1}), \quad \lambda(y,\delta) = (\lambda y, \beta(\lambda,y)\delta).$$

On a $\Theta(x,1_\Lambda) = (F(x),1_\Gamma)$ donc $\tilde{X}$ est également un domaine fondamental pour $Z \circlearrowleft \Gamma$. Les domaines fondamentaux pour $Z \circlearrowleft \Lambda$ sont de la forme $\tilde{X}' = \{x, f(x) \mid x\in X\}$ où $f : X \to \Lambda$ est mesurable. S'il existe un isomorphisme $\varphi : \Gamma \to \Lambda$ tel que $\gamma\tilde{X}' = \varphi(\gamma)^{-1}\tilde{X}'$ pour tout $\gamma\in\Gamma$, on démontre facilement les égalités $\alpha(\gamma,x) = f(\gamma x)\varphi(\gamma)f(x)^{-1}$, ie α est cohomologue à un isomorphisme, et $f(\gamma x)^{-1}F(\gamma x) = \varphi(\gamma)\ f(x)^{-1}F(x)$, ie $X \circlearrowleft \Gamma$ et $Y \circlearrowleft \Lambda$ sont isomorphes.

Partons maintenant d'une équivalence mesurable $Z \circlearrowleft \Gamma\times\Lambda$. Le fait que le Γ-espace Z admette un domaine fondamental implique qu'il est libre et que ΓW est de mesure infinie dès que $W\subset Z$ est de mesure non nulle. En général deux domaines fondamentaux respectifs pour $Z \circlearrowleft \Gamma$ et $Z \circlearrowleft \Lambda$ peuvent avoir des mesures différentes dont le rapport est appelé constante de couplage de $Z \circlearrowleft \Gamma\times\Lambda$ — on a vu que lorsque Z provient d'une équivalence orbitale, cette constante vaut 1.

Soit Y un domaine fondamental pour $Z \circlearrowleft \Gamma$. Pour presque tout $z\in Z$ il existe un élément $r(z)\in\Gamma$ tel que $r(z)^{-1}z \in Y$, et cela définit une application mesurable et Γ-équivariante $r : Z \to \Gamma$. On retrouve Y en remarquant que $Y = \{r(z)^{-1}z \mid z\in Z\} = r^{-1}(\{1_\Gamma\})$.

Dans l'isomorphisme $Z/\Gamma \simeq Y$ l'action $Z/\Gamma \circlearrowleft \Lambda$ se lit de la manière suivante : $\lambda\cdot y = r(\lambda y)^{-1}\lambda y$, et la formule $\beta(\lambda,y) = r(\lambda y)^{-1}$ définit un cocycle pour cette action. Dans le cas où Z provient d'une équivalence orbitale, on retrouve bien sûr l'action originale $Y \circlearrowleft \Lambda$ à isomorphisme près, et β est le cocycle associé à l'équivalence orbitale.

Étant donnée une équivalence mesurable Z entre Γ et Λ, on a une notion d'induction des représentations de Γ à Λ. Soit V une représentation unitaire de Γ sur un espace de Hilbert — on peut généraliser ce qui suit aux représentations isométriques ultrafaiblement continues sur les espaces de Banach duaux.

Soit Y un domaine fondamental pour $Z \circlearrowleft \Gamma$, pour tout $p\in[1,+\infty]$ on munit $I_Z^pV := L^p(Y,V)$ de la représentation de Λ qui suit : $(\lambda f)(y) = r(\lambda^{-1}y)f(\lambda^{-1}\cdot y)$. Cette représentation induite est isométrique et ultrafaiblement continue, unitaire lorsque $p=2$. Si on identifie I_Z^pV à un sous-espace « L^p » de $\mathcal{L}(Z,V)^\Gamma$, alors cette représentation provient de l'action naturelle $\mathcal{L}(Z,V) \circlearrowleft \Lambda$, où Λ agit trivialement sur V. En particulier si Λ est un sous-groupe d'indice fini dans Γ, en prenant $X=\Gamma$ muni de l'action par translation à gauche (resp. à droite) de Γ (resp. Λ) on retrouve la notion d'induction classique.

Rappelons qu'une représentation unitaire V de Γ est dite c_0 si on a $\lim_{\gamma\to\infty}(\zeta|\gamma\xi) = 0$ pour tous $\zeta,\ \xi\in V$. C'est en particulier le cas de la représentation régulière de Γ. Cette notion est stable par induction comme le montre le lemme suivant.

Lemme 1.4 *Soit Z un couplage mesurable entre Γ et Λ et V une représentation unitaire et c_0 de Γ. Alors $I_Z^2 V$ est également c_0. De plus on n'a pas besoin que les domaines fondamentaux de $Z \circlearrowleft \Lambda$ soient de mesure finie.*

Démonstration. Il suffit de montrer que $\lim_{\lambda\to\infty}(\zeta|\lambda\zeta) = 0$ pour ζ variant dans un sous-ensemble dense de $I_Z^2 V$. Considérons donc une fonction $\zeta \in L^2(Y, V)$ qui ne prend qu'un nombre fini de valeurs $v_1, \ldots, v_n$. Soit $\Omega_\varepsilon \subset \Gamma$ le sous-ensemble fini des éléments $\gamma \in \Gamma$ tels que $|(v_i|\gamma v_j)| > \varepsilon$ pour tous i, j. Fixons un élément $\lambda \in \Lambda$, en distinguant l'ensemble des éléments $y \in Y$ tels que $r(\lambda^{-1}y) \in \Omega_\varepsilon$ ($\Leftrightarrow y \in \lambda\Omega_\varepsilon Y$) de son complémentaire on voit que

$$\Big| \int_Y (\zeta(y)|r(\lambda^{-1}y)\zeta(\lambda^{-1}\cdot y))dy \Big| \leq \|\zeta\|_\infty^2 \, |\lambda\Omega_\varepsilon Y \cap Y| + \varepsilon|X|.$$

Il ne reste plus qu'à observer que $\lim_{\lambda\to\infty} |\lambda\Omega_\varepsilon Y \cap Y| = 0$, en incluant approximativement $\Omega_\varepsilon Y$ et Y, qui sont de mesure finie, dans un nombre fini de translatés d'un domaine fondamental de $Z \circlearrowleft \Lambda$ — cela revient à démontrer que $L^2(Z) \circlearrowleft \Lambda$ est c_0. [*Préciser ...*] ■

1.3 Résultats de la deuxième section

Dans la deuxième section on définira et on étudiera les groupes de cohomologie bornée $H_b^n(\Gamma, V)$, en particulier lorsque V est une représentation unitaire de Γ. Pour démontrer le théorème 0.1, nous avons juste besoin de savoir les choses suivantes :

1. Si $V = 0$ alors $H_b^n(\Gamma, V) = 0$; si $V \simeq V'$ alors $H_b^n(\Gamma, V) \simeq H_b^n(\Gamma, V')$.
2. Si $V \hookrightarrow V'$ est une sous-représentation on peut définir une application $H_b^n(\Gamma, V) \to H_b^n(\Gamma, V')$ qui est injective pour $n = 2$.
3. Si $Z \circlearrowleft \Gamma \times \Lambda$ est un couplage mesurable, on peut définir une application d'induction $H_b^n(\Gamma, V) \to H_b^n(\Lambda, I_Z^2 V)$ qui est injective pour $n = 2$.
4. Si $\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2$ alors on a la formule $H_b^2(\Gamma, V) = H_b^2(\Gamma_1, V^{\Gamma_2}) \oplus H_b^2(\Gamma_2, V^{\Gamma_1})$.

1.4 Rigidité

On démontre maintenant le résultat de rigidité annoncé. L'utilisation des résultats de cohomologie bornée présentés précédemment est isolée dans la proposition 1.5. On en déduit par des méthodes élémentaires de théorie ergodique le théorème 1.6 dont le théorème 0.1 est clairement une conséquence, au vu du lien entre équivalence orbitale et équivalence mesurable que nous avons décrit plus haut.

On note $\mathcal{C}$ la classe des groupes dénombrables Γ pour lesquels il existe une représentation V unitaire et c_0 telle que $H_b^2(\Gamma, V) \neq 0$.

Proposition 1.5 *Soit $\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2$ un produit cartésien de deux groupes dans $\mathcal{C}$ et sans torsion. Soit $\Lambda = \Lambda_1 \times \Lambda_2$ un produit cartésien de deux groupes dénombrables. Soit Z un couplage mesurable entre Γ et Λ tel que les actions $Z/\Gamma \circlearrowleft \Lambda_i$ soient ergodiques. Alors il existe un domaine fondamental Y pour $Z \circlearrowleft \Gamma$ tel que $\Lambda_i Y \subset \Gamma_i Y$ pour $i = 1, 2$, à permutation près.*

Démonstration. Soit V_1 une représentation unitaire et c_0 de Γ_1 telle que $H_b^2(\Gamma_1, V_1) \neq 0$. On considère V_1 comme une représentation de Γ via la projection sur Γ_1 et $H_b^2(\Gamma, V_1)$ est non nul car il admet $H_b^2(\Gamma_1, V_1^{\Gamma_2}) = H_b^2(\Gamma_1, V_1)$ comme facteur direct. Par conséquent $H_b^2(\Lambda, I_Z^2 V_1)$ est non nul. Or on a

$$H_b^2(\Lambda, V_1) = H_b^2(\Lambda_1, (I_Z^2 V_1)^{\Lambda_2}) \oplus H_b^2(\Lambda_2, (I_Z^2 V_1)^{\Lambda_1}).$$

L'un des deux facteurs est donc nul, on peut par exemple supposer que c'est le premier et on en déduit en particulier $(I_Z^2 V_1)^{\Lambda_2} \neq 0$.

Soit Y_0 un domaine fondamental quelconque pour $Z \circlearrowleft \Gamma$ et $r_0 : Z \to \Gamma$ l'application Γ-équivariante associée. D'après ce qui précède il existe $\rho_1 : Y_0 \to V_1$ non nulle telle que $\rho_1(\lambda \cdot y) = r_0(\lambda y)^{-1}\rho_1(y)$ pour tout $\lambda \in \Lambda_2$ et presque tout $y \in Y_0$. Maintenant, comme $V_1 \circlearrowleft \Gamma$ est c_0, ses orbites sont discrètes donc l'espace des orbites V_1/Γ est séparable. De plus $Y_0 \circlearrowleft \Lambda_2$ est ergodique par hypothèse, donc l'application invariante $\bar{\rho}_1 : Y_0 \to V_1/\Gamma$ est constante — autrement dit ρ_1 est à valeurs dans une orbite Γv, avec $v \neq 0$ car $\rho_1 \neq 0$.

Par ailleurs, si $\gamma \in \Gamma \setminus \Gamma_2$ alors le projeté de γ^n sur Γ_1 tend vers $+\infty$ car Γ_1 est sans torsion, et comme V_1 est c_0 il s'ensuit que $(v|\gamma^n v) \to 0$, donc $\gamma \notin \mathrm{Stab}_\Gamma(v)$. Comme Γ_2 n'agit pas, on a $\mathrm{Stab}_\Gamma(v) = \Gamma_2$. On peut donc identifier l'orbite Γv à Γ/Γ_2 et on obtient en relevant ρ_1 une application $r_1 : Y_0 \to \Gamma$ telle que

$$\forall \lambda \in \Lambda_2 \quad r_1(\lambda \cdot y) = r_0(\lambda y)^{-1} r_1(y) \mod \Gamma_2. \tag{1}$$

On pose alors $Y_1 = \{r_1(y)^{-1}y \mid y \in Y_0\}$. C'est clairement un domaine fondamental pour $Z \circlearrowleft \Gamma$ et on a, pour tout $\lambda \in \Lambda_2$:

$$\begin{aligned} \lambda\, r_1(y)^{-1} y = r_1(y)^{-1}\, \lambda y &= r_1(y)^{-1} r_0(\lambda y)(\lambda \cdot y) \\ &= r_1(y)^{-1} r_0(\lambda y) r_1(\lambda \cdot y)\; r_1(\lambda \cdot y)^{-1}(\lambda \cdot y). \end{aligned}$$

D'après (1) on a $r_1(y)^{-1} r_0(\lambda y) r_1(\lambda \cdot y) \in \Gamma_2$ et on a donc démontré que $\Lambda_2 Y_1 \subset \Gamma_2 Y_1$.

On recommence maintenant avec une représentation V_2, unitaire et c_0, de Γ_2 telle que $H_b^2(\Gamma_2, V_2) \neq 0$. Pour les mêmes raisons que précédemment on a $H_b^2(\Lambda_1, (I_Z^2 V_2)^{\Lambda_2}) \neq 0$ ou $H_b^2(\Lambda_2, (I_Z^2 V_2)^{\Lambda_1}) \neq 0$, choisissons une indexation (i,j) de $\{1,2\}$ telle que $H_b^2(\Lambda_i, (I_Z^2 V_2)^{\Lambda_j})$ est non nul. À nouveau on en déduit l'existence de $r_2 : Y_1 \to \Gamma$ telle que

$$\forall \lambda \in \Lambda_j \quad r_2(\lambda \cdot y) = r_1(\lambda y)^{-1} r_2(y) \mod \Gamma_1.$$

Pour cette deuxième étape on doit de plus remplacer r_2 par sa composée avec la projection $\Gamma \twoheadrightarrow \Gamma_2$: cela ne change rien modulo Γ_1 donc l'identité ci-dessus est toujours valable. Le même calcul que précédemment montre que $\Lambda_j Y_2 \subset \Gamma_1 Y_2$ pour le domaine fondamental $Y_2 = \{r_2(y)^{-1}y \mid y \in Y_1\}$. Par ailleurs comme $Y_2 \subset \Gamma_2 Y_1 \subset \Gamma_2 Y_2$ on a

$$\Lambda_2 Y_2 \subset \Lambda_2 \Gamma_2 Y_1 = \Gamma_2 \Lambda_2 Y_1 \subset \Gamma_2 \Gamma_2 Y_1 \subset \Gamma_2 Y_2.$$

En particulier, si on avait $j = 2$ on aurait $\Lambda_2 \Gamma_2 \subset \Gamma_1 Y_2 \cap \Gamma_2 Y_2 = Y_2$ ce qui est impossible car $\Lambda_2 \Gamma_2$ est de mesure infinie. En posant $Y = Y_2$ on a donc finalement

$$\Lambda_1 Y \subset \Gamma_1 Y \quad \text{et} \quad \Lambda_2 Y \subset \Gamma_2 Y.$$

■

Théorème 1.6 *Soit $\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2$ un produit cartésien de deux groupes dans $\mathcal{C}$ et sans torsion. Soit $\Lambda = \Lambda_1 \times \Lambda_2$ un produit cartésien de deux groupes sans torsion. Soit Z un couplage mesurable de constante 1 entre Γ et Λ tel que les actions $Z/\Gamma \circlearrowleft \Lambda_i$ soient ergodiques. Alors il existe, à permutation près de Λ_1 et Λ_2, des isomorphismes $\varphi_i : \Gamma_i \to \Lambda_i$ et un domaine fondamental Y commun à $Z \circlearrowleft \Gamma$ et $Z \circlearrowleft \Lambda$ tel que $\gamma Y = \varphi(\gamma)^{-1} Y$ pour $\varphi = \varphi_1 \times \varphi_2$ et tout $\gamma \in \Gamma$.*

Démonstration. D'après la proposition précédente on peut choisir un domaine fondamental Y pour $Z \circlearrowleft \Gamma$ tel que $\Lambda_i Y \subset \Gamma_i Y$ pour $i = 1, 2$. Montrons que Y est aussi un domaine fondamental pour $Z \circlearrowleft \Lambda$. Il suffit de montrer que $|\lambda Y \cap Y| = 0$ pour $\lambda \neq 1$: comme $Z \circlearrowleft \Lambda$ admet un domaine fondamental, on pourra en déduire qu'il existe un tel domaine $X \supset Y$, mais on a $|X| = |Y|$ par hypothèse.

Soit $Z_2 = \Gamma_2 Y$ muni de l'action de $\Gamma_2 \times \Lambda_2$. Pour tout $\lambda_1 \in \Lambda_1$, le sous-ensemble $\lambda_1 Z_2 \cap Z_2$ de Z_2 est stable par l'action ergodique de $\Gamma_2 \times \Lambda_2$, donc on a soit $|\lambda_1 Z_2 \cap Z_2| = 0$, ce qui implique $|\lambda_1 Y \cap Y| = 0$, soit $Z_2 \subset \lambda_1 Z_2$ à un ensemble de mesure nulle près. Ce deuxième cas est exclu lorsque $\lambda_1 \neq 1$: on aurait en effet $\lambda_1^{-1}Y \subset \lambda_1^{-1}Z_2 \subset Z_2 = \Gamma_2 Y$, mais d'autre part on a $\lambda_1^{-1}Y \subset \Gamma_1 Y$ et on obtiendrait ainsi $\lambda_1^{-1}Y \subset Y$ donc $\lambda_1^{-n}Y \subset Y$ pour tout n, ce qui est impossible car Λ_1 est sans torsion et Y est de mesure finie.

En utilisant $Z_1 = \Gamma_1 Y$ on montre de même que $|\lambda_2 Y \cap Y| = 0$ pour tout $\lambda_2 \in \Lambda_2 \setminus \{1\}$. Enfin si $(\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda$ est différent de 1, par exemple $\lambda_2 \neq 1$, on a

$$\lambda Y \cap Y = (\lambda_2(\lambda_1 Y \cap \lambda_2^{-1}Y)) \cap Y \subset (\lambda_2(\Gamma_1 Y \cap \Gamma_2 Y)) \cap Y = \lambda_2 Y \cap Y$$

donc $|\lambda Y \cap Y| = 0$.

Exactement par le même raisonnement que précédemment on montre que $\lambda_1 Y$ et $\gamma_1 Y$ sont soit confondus soit disjoints, à des ensembles de mesure nulle près. Comme Y est un domaine fondamental pour les actions de Γ et Λ, cela implique clairement l'existence d'une bijection $\varphi_1 : \Gamma_1 \to \Lambda_1$ telle que $\varphi_1(\gamma_1)^{-1}Y = \gamma_1 Y$ pour tout $\gamma_1 \in \Gamma_1$. Pour γ_1, $\gamma_1' \in \Gamma_1$ on a, à des ensembles de mesure nulle près :

$$\varphi_1(\gamma_1\gamma_1')^{-1}Y = \gamma_1\gamma_1' Y = \gamma_1\varphi_1(\gamma_1')^{-1}Y = \varphi_1(\gamma_1')^{-1}\gamma_1 Y = \varphi_1(\gamma_1')^{-1}\varphi_1(\gamma_1)^{-1}Y,$$

donc φ_1 est un isomorphisme. On obtient φ_2 de la même manière. $\blacksquare$

2 Cohomologie bornée