Sur quelques propriétés analytiques des groupes quantiques libres

Roland Vergnioux

LMNO, Université de Caen

Le Havre, 9 juin 2011

Plan de l'exposé

Moyennes invariantes

Dans tout l'exposé G est un groupe discret.

Définition

Une **moyenne** *sur* G *est une application* $m : \mathcal{P}(G) \to [0,1]$ *telle que*

1. $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$ *si* $A \cap B = \emptyset$,
2. $m(\emptyset) = 0$ *et* $m(G) = 1$.

Définition

On dit que G *est* **moyennable** *s'il existe une moyenne invariante sur* G*, c'est-à-dire telle que* $m(gA) = m(A)$ *pour tous* $g \in G$, $A \subset G$.

Exemple : les groupes finis.

Moyennabilité : examples

Définition

On dit que G est **moyennable** *s'il existe une moyenne invariante sur G, c'est-à-dire telle que $m(gA) = m(A)$ pour tous $g \in G$, $A \subset G$.*

Exemple : $G = \mathbb{Z}$. On considère les moyennes

$$m_n : A \mapsto \frac{\mathrm{card}\, A \cap [\![-n, n]\!]}{2n+1}.$$

Elles sont presques invariantes : $m_n(A+k) - m_n(A) \to_n 0$ pour tout k. Toute « valeur d'adhérence » m de la suite m_n est une moyenne invariante sur $\mathbb{Z}$.

Plus généralement : les groupes abéliens, ou résolubles, sont moyennables.

Moyennabilité : examples

Définition

On dit que G est **moyennable** *s'il existe une moyenne invariante sur G, c'est-à-dire telle que $m(gA) = m(A)$ pour tous $g \in G$, $A \subset G$.*

Contre-exemple : $G = F_2$.
Les éléments de F_2 s'écrivent comme mots réduits en a, b, a^{-1}, b^{-1}.

On considère $A = \{a \cdots, a^{-1} \cdots\}$.

- $A \cup aA = F_2 \Rightarrow m(A) \geq 1/2$
- A, bA, b^2A sont deux-à-deux disjoints $\Rightarrow m(A) \leq 1/3$

Contradiction : F_2 n'est pas moyennable.

Plan de l'exposé

1. Moyennabilité
   - Définition
   - Exemples

2. Groupes et algèbres d'opérateurs
   - Algèbres de groupes
   - Moyennabilité
   - Propriété AO
   - Cohomologie L^2

3. Groupes quantiques libres
   - Groupes quantiques
   - Propriété AO pour A_o
   - Nombres de Betti L^2 pour A_o

C^*-Algèbres de groupes

G groupe ➞ $\mathbb{C}[G] = \bigoplus_g \mathbb{C}g$ algèbre involutive

$\pi : G \to U(H)$ repr. unitaire ➞ $\pi : \mathbb{C}[G] \to B(H)$ $*$-représentation.
Exemples. $H = \mathbb{C}$, $\epsilon(g) = \mathrm{id}$: représentation triviale.
$H = \ell^2(G)$, $\lambda(g)(\varphi) = (h \mapsto \varphi(g^{-1}h))$: représentation régulière (gauche).
$H = \ell^2(G)$, $\rho(g)(\varphi) = (h \mapsto \varphi(hg))$: représentation régulière droite.

Complétions de $\mathbb{C}[G]$:

- $C^*_r(G)$ donnée par $\|x\| = \|\lambda(x)\| = \|\rho(x)\|$,
- $C^*(G)$ donnée par $\|x\| = \sup_\pi \|\pi(x)\|$,
- et l'algèbre de von Neumann $L(G)$.

Question ouverte : a-t-on $L(F_2) \simeq L(F_3)$?
Si G, H sont moyennables ICC, alors $L(G) \simeq L(H)$...

Moyennabilité

Théorème

G est moyennable $\iff C^*(G) \to C^*_r(G)$ est un isomorphisme
$\iff \epsilon : C^*(G) \to \mathbb{C}$ se factorise à travers $C^*_r(G)$.

$$\begin{tikzcd} C^*(G) \arrow[r, "\simeq ?"] \arrow[dr, "\epsilon"'] & C^*_r(G) \arrow[d, dashed, "?"] \\ & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

On retrouve le fait que F_2 n'est pas moyennable en calculant

$$\|\lambda(a + a^{-1} + b + b^{-1})\| = 2\sqrt{3},$$

car les morphismes de C^*-algèbres sont automatiquement contractants.

La propriété d'Akemann et Ostrand

Comme pour $C^*(G)$ et $C^*_r(G)$, il y a en général deux « bonnes » complétions du produit tensoriel algébrique $A \odot B$, notées $A \otimes_{\max} B \twoheadrightarrow A \otimes_{\min} B$. On dit que A est **nucléaire** si cette flèche est un isomorphisme pour toute B.

Proposition

G est moyennable $\iff$ $C^*_r(G)$ est nucléaire.

On dit que G a la **Propriété AO** s'il existe une factorisation comme suit :

$$\begin{tikzcd} C^*_r(G) \otimes_{\max} C^*_r(G) \arrow[r] \arrow[d, "(\lambda,\rho)"'] & C^*_r(G) \otimes_{\min} C^*_r(G) \arrow[d, dashed, "?"] \\ B(\ell^2(G)) \arrow[r] & B(\ell^2(G))/K(\ell^2(G)) \end{tikzcd}$$

La propriété d'Akemann et Ostrand

On dit que G a la **Propriété AO** s'il existe une factorisation comme suit :

$$\begin{tikzcd} C_r^*(G) \otimes_{\max} C_r^*(G) \arrow[r] \arrow[d, "(\lambda,\rho)"'] & C_r^*(G) \otimes_{\min} C_r^*(G) \arrow[d, dashed, "?"] \\ B(\ell^2(G)) \arrow[r] & B(\ell^2(G))/K(\ell^2(G)) \end{tikzcd}$$

Application [Skandalis 1988]
Si G a la propriété (T) de Kazhdan et la propriété AO, alors $C_r^*(G)$ n'est pas nucléaire en K-théorie. Exemple : $Sp(n,1)$.

Application [Ozawa 2004]
Si G est ICC, exact, et a la propriété AO sans être moyennable, alors $L(G)$ est un facteur premier : on ne peut pas écrire $L(G) = A\bar{\otimes}B$ avec A, B de dimension infinie. Exemple : F_2.

AO pour les groupes libres

Il suffit de trouver une application linéaire contractante Φ qui fasse commuter le diagramme suivant modulo les opérateurs compacts :

$$\begin{tikzcd} C_r^*(G)\otimes_{\max} C_r^*(G) \arrow[r] \arrow[d, "(\lambda,\rho)"'] & C_r^*(G)\otimes_{\min} C_r^*(G) \arrow[d, hook, "\lambda\otimes\rho"] \\ B(\ell^2(G)) \arrow[r, "\Phi"'] & B(\ell^2(G)\otimes\ell^2(G)) \end{tikzcd}$$

Dans le cas $G = F_2$ on utilise le « découpage des mots » : $\Phi = \mathrm{Ad}\ F$,

$$F : \ell^2(G) \to \ell^2(G \times G), \quad \delta_g \mapsto \frac{1}{\sqrt{|g|+1}} \sum_{g=(h,k)} \delta_h\otimes\delta_k .$$

F est isométrique. De plus il revient « presque au même » de remplacer g par ag, ou h par ah $\to$ commutation modulo les compacts.

Cohomologie L^2

On s'intéresse aux nombres de Betti L^2 :

$$\beta_k^{(2)}(G) = \dim_{L(G)} H^k(\mathbb{C}[G], \ell^2(G))$$

Résultats :

- pour G moyennable, $\forall k \;\; \beta_k^{(2)}(G) = 0$
  (mais $H^1(\mathbb{C}[G], \ell^2(G)) \neq 0$ en général)
- pour G avec (T), $\beta_1^{(2)}(G) = 0$
  (en fait $H^1(\mathbb{C}[G], X) = 0$ pour toute repr. π sur X)
- pour $G = F_n$, $\beta_1^{(2)}(G) = n - 1$.

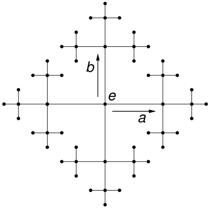
NB : $H^1(\mathbb{C}[G], \ell^2(G)) = \{$dérivations $d : \mathbb{C}[G] \to {}_\lambda\ell^2(G)_\epsilon\}/\{$intérieures$\}$

Cohomologie L^2

On s'intéresse aux nombres de Betti L^2 :

$$\beta_k^{(2)}(G) = \dim_{L(G)} H^k(\mathbb{C}[G], \ell^2(G))$$

Dans le cas de F_2, on voit que $H^1(\mathbb{C}[G], \ell^2(G)) \neq 0$ en considérant la dérivation donnée par les chemins vers l'origine dans le graphe de Cayley :

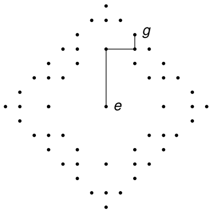


Cohomologie L^2

On s'intéresse aux nombres de Betti L^2 :

$$\beta_k^{(2)}(G) = \dim_{L(G)} H^k(\mathbb{C}[G], \ell^2(G))$$

Dans le cas de F_2, on voit que $H^1(\mathbb{C}[G], \ell^2(G)) \neq 0$ en considérant la dérivation donnée par les chemins vers l'origine dans le graphe de Cayley :



On pose $d(g) = \sum\{\delta_a \mid a \text{ entre } e \text{ et } g\} \in \ell^2(\text{arêtes})$.
d n'est pas intérieure car $g \mapsto \|d(g)\| = \sqrt{|g|}$ n'est pas bornée.

Plan de l'exposé

Groupes quantiques

On n'a plus de groupe G, mais toujours une C^*-algèbre unifère $C^*(G) = A$

- munie d'un « coproduit » $\delta : A \to A \otimes A$
- tel que $(\delta \otimes \mathrm{id})\delta = (\mathrm{id} \otimes \delta)\delta$
- et $\delta(A)(A \otimes 1)$, $\delta(A)(1 \otimes A)$ sont denses dans $A \otimes A$

Dans le cas d'un groupe, $\delta(g) = g \otimes g$.

Exemples : groupes quantiques libres unitaires et orthogonaux.
Pour $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ on définit les C^*-algèbres unifères

$$A_u(Q) = \langle u_{ij} \mid (u_{ij}) \text{ et } Q(u_{ij}^*)Q^{-1} \text{ unitaires dans } M_n(A) \rangle$$
$$A_o(Q) = \langle u_{ij} \mid (u_{ij}) = Q(u_{ij}^*)Q^{-1} \text{ unitaire dans } M_n(A) \rangle$$

munies de $\delta(u_{ij}) = \sum u_{ik} \otimes u_{kj}$ [Wang 1995].

Groupes quantiques

On n'a plus de groupe G, mais toujours une C^*-algèbre unifère $C^*(G) = A$

- munie d'un « coproduit » $\delta : A \to A \otimes A$
- tel que $(\delta \otimes \mathrm{id})\delta = (\mathrm{id} \otimes \delta)\delta$
- et $\delta(A)(A \otimes 1)$, $\delta(A)(1 \otimes A)$ sont denses dans $A \otimes A$

Dans le cas d'un groupe, $\delta(g) = g \otimes g$.

La théorie générale [Woronowicz 1987] assure l'existence d'un « état de Haar » et en particulier de représentations $\epsilon : A \to \mathbb{C}$ et λ, $\rho : A \to B(H)$.
→ C^*-algèbre réduite, algèbre de von Neumann
→ moyennabilité, propriété AO, nombres de Betti L^2.

Les groupes quantiques libres unitaires (resp. orthogonaux) ne sont pas moyennables pour $n \geq 2$ (resp. $n \geq 3$) [Banica 1997].

Propriété AO pour A_o

Théorème (V. 2005, Vaes-V. 2007)

Pour $n \geq 3$, $Q\bar{Q}$ scalaire, $A_o(Q)$ a la propriété AO.

Idées :

- droites $\mathbb{C}g \subset \mathbb{C}[G]$, avec $g \in G$ ➔ algèbres de matrices $L(H_\alpha)$ avec α coreprésentation irréductible de (A, δ).
- pour $A_o(I_n)$ les α sont indexées par $\mathbb{N}$ [Banica]
- découpage des mots ➔ morphisme $H_{k+l} \hookrightarrow H_k \otimes H_l$
  ➔ opérateur $F : H \to H \otimes H$ analogue à celui de F_2

Application : premiers exemples de facteurs premiers de type *III* [Vaes-V.]

$A_o(Q)$ partage plusieurs autres propriétés analytiques avec $C^*(F_2)$: propriété de décroissance rapide, a-T-moyennabilité, ...

Nombres de Betti L^2 pour A_o

On peut définir un graphe de Cayley « quantique » associé à $A_o(Q)$:

- espaces H, K des sommets et des arêtes
- opérateurs but $B : K \to H$ et retournement $\Theta : K \to K$

avec des représentations de $A_o(Q)$ [V. 2003].

Théorème (V. 2009)

Il existe une unique « dérivation chemins », i.e. $d : A_o(Q) \to \mathrm{Ker}(\Theta + \mathrm{id})$ telle que $B \circ d(a) = a - \epsilon(a)1$. Cette dérivation est intérieure.

Interprétation : le graphe de Cayley quantique est un arbre, mais les chemins y sont de longueur bornée !

Théorème (V. 2009)

Le premier nombre de Betti $\beta_1^{(2)}(A_o(I_n))$ est nul pour tout n.