La sous-algèbre radiale dans les groupes quantiques libres orthogonaux

Roland Vergnioux
travail en commun avec Amaury Freslon

Université de Caen
Université Paris-Sud

Clermont-Ferrand, 25 novembre 2016

Plan de l'exposé

Groupes quantiques discrets

Γ groupe (discret) ➞ algèbre de groupe $\mathbb{C}[\Gamma]$, C^*-algèbre pleine $C^*_{\mathrm{p}}(\Gamma)$
Reconstruire Γ ? Coproduit $\Delta : C^*_{\mathrm{p}}(\Gamma) \to C^*_{\mathrm{p}}(\Gamma) \otimes C^*_{\mathrm{p}}(\Gamma)$, $g \mapsto g \otimes g$.
Alors $\Gamma \simeq \{u \in \mathcal{U}(C^*_{\mathrm{p}}(\Gamma)) \mid \Delta(u) = u \otimes u\}$.

Définition

C^*-algèbre de Woronowicz : C^*-algèbre unifère A et $*$-homomorphisme $\Delta : A \to A \otimes A$ (coproduit) tel que

- $(\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta = (\mathrm{id} \otimes \Delta)\Delta$,
- $\Delta(A)(1 \otimes A)$ and $\Delta(A)(A \otimes 1)$ sont denses dans $A \otimes A$.

Exemples « classiques » :

- Γ groupe discret, $A = C^*_{\mathrm{p}}(\Gamma)$, $\Delta(g) = g \otimes g$ — mais aussi $A = C^*_{\mathrm{r}}(\Gamma)$,
- G groupe compact, $A = C(G)$, $\Delta(f) = ((x, y) \mapsto f(xy))$.

Notation : $A = C^*(\mathbb{\Gamma}) = C(\mathbb{G})$.

Les groupes quantiques libres orthogonaux

C^*-algèbres définie par générateurs et relations : $(n \in \mathbb{N},\ Q \in GL_n(\mathbb{C}))$

$$A_o(n) = C^*(\mathbb{F}O_n) = \langle u_{ij}, 1 \le i,j \le n \mid u_{ij} = u_{ij}^*,\ \ (u_{ij})\ \text{ unitaire}\rangle.$$
$$A_o(Q) = C^*(\mathbb{F}O_Q) = \langle u_{ij}, 1 \le i,j \le n \mid Q(u_{ij}^*)Q^{-1} = (u_{ij})\ \text{ unitaire}\rangle.$$

$\Delta(u_{ij}) = \sum u_{ik} \otimes u_{kj}$ ➔ groupe quantique libre orthogonal $\Gamma = \mathbb{F}O(Q)$.
« libre » car on a $A_o(n) \twoheadrightarrow C^*_{\mathrm{p}}((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{*n}),\ u_{ij} \mapsto \delta_{ij} a_i$.
« orthogonal » car on a $A_o(n) \twoheadrightarrow A_o(n)_{\mathrm{ab}} = C(O_n)$.

Autres exemples « quantiques » :

- groupes quantiques libres unitaires $\mathbb{F}U_n$, $\mathbb{F}U_Q$,
- dual du groupe de permutation quantique S_n^+,
- produits libres, produits en couronne libre, ...,
- catégorie de partitions ➔ quotient de $\mathbb{F}O_n$,
- duaux des q-déformations de groupes de Lie compacts.

Algèbres d'opérateurs

Théorème (Woronowicz, état de Haar)

Il existe un unique état $h \in C^*(\mathbb{\Gamma})'$ *tel que* $(h \otimes \mathrm{id})\Delta = (\mathrm{id} \otimes h)\Delta = 1h$.

On dispose alors des objets suivants :

- construction GNS ➜ repr. régulière $\lambda : C^*(\mathbb{\Gamma}) \to B(\ell^2\mathbb{\Gamma})$,
- $C^*_{\mathrm{r}}(\mathbb{\Gamma}) = \lambda(C^*(\mathbb{\Gamma}))$ est encore une C^*-algèbre de Woronowicz,
- $\mathscr{L}(\mathbb{\Gamma}) = C^*_{\mathrm{r}}(\mathbb{\Gamma})''$ est l'algèbre de von Neumann de $\mathbb{\Gamma}$,
- représentation triviale $\epsilon : C^*_{\mathrm{p}}(\mathbb{\Gamma}) \to \mathbb{C}$.

$\mathbb{\Gamma}$ est *unimodulaire* si h est tracial, *moyennable* si ϵ se factorise à travers λ.

$\mathbb{F}O_n$ est unimodulaire. Le dual de $SU_q(2)$, de G_q, sont moyennables.

Théorème (Banica)

$\mathbb{F}O_n$ *est non-moyennable dès que* $n \geq 3$.

Coreprésentations

Analogue des unitaires « group-like » $\Delta(u) = u \otimes u$?

➔ coreprésentations $u \in B(H) \otimes C^*(\Gamma)$ t.q. $(\mathrm{id} \otimes \Delta)(u) = u_{12} u_{13}$

➔ catégorie $\mathrm{Corep}(\Gamma)$, irréductibles à équivalence près $\mathrm{Irr}(\Gamma)$.

Théorème (Woronowicz)

Toute coreprésentation (unitaire de dimension finie) est somme d'irréductibles. $\mathrm{Corep}(\Gamma)$ *est une* C^**-catégorie tensorielle rigide.*

Cas des groupes quantiques libres orthogonaux :

Théorème (Banica)

On suppose $Q\bar{Q} \in \mathbb{C} I_n$. *Alors* $\mathrm{Irr}(\mathbb{F}O_Q) = \{u_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ *avec* $u_0 = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$, $u_1 = (u_{ij})$, $u_k \otimes u_1 \simeq u_{k-1} \oplus u_{k+1} \simeq u_1 \otimes u_k$.
En fait $\mathrm{Corep}(\mathbb{F}O_Q) \simeq \mathrm{Rep}(SU_q(2)) \simeq TL_q$ *comme catégories abstraites.*

Plan de l'exposé

K-théorie

On ne connaît pas de calcul direct de $K_*(C^*_{\mathrm{p}}(\mathbb{F}O_n))$...

Théorème (Voigt 2011)

$\mathbb{F}O_n$ vérifie la propriété de Baum-Connes forte et est K-moyennable.
On a $K_*(C^*_{\mathrm{p}}(\mathbb{F}O_n)) = K_*(C^*_{\mathrm{r}}(\mathbb{F}O_n)) = \mathbb{Z}_{(0)} \oplus \mathbb{Z}_{(1)}$.

La preuve repose sur l'équivalence monoïdale avec $SU_q(2)$.
Question : a-t-on $C^*_{\mathrm{r}}(\mathbb{F}O_n) \simeq C^*_{\mathrm{r}}(\mathbb{F}O_m)$ **pour** $n \neq m$ **?**

On a $\mathbb{F}U_n \subset \mathbb{F}O_n * \mathbb{Z}$ [Banica 1996].

Théorème (V.–Voigt 2013)

La propriété de Baum-Connes forte est stable par produit libre.
On a $K_*(C^*_{\mathrm{r}}(\mathbb{F}U_n)) = \mathbb{Z}_{(0)} \oplus (\mathbb{Z}^2)_{(1)}$.

La preuve repose sur la construction de l'arbre de Basse-Serre quantique et la méthode Dirac/dual-Dirac [Kasparov–Skandalis].

Propriétés d'approximation

Pour $n \geq 3$, $\mathbb{F}O_n$ n'est pas moyennable [Banica 1996] : « on ne peut pas approcher la fonction 1 par des fonctions de type positif à support fini ».

Théorème (Brannan 2012)

$\mathbb{F}O_n$ a la propriété d'approximation de Haagerup.

« On peut approcher la fonction 1 par des fonctions de type positif qui tendent vers 0 à l'infini. » Est-ce que cela implique la propriété de Baum-Connes forte comme dans le cas classique ?

Théorème (Freslon 2013)

$\mathbb{F}O_n$ est faiblement moyennable avec constante 1.

« On peut approcher la fonction 1 par des fonctions de type complètement borné à support fini. »

Algèbre de von Neumann

Théorème (Vaes–V. 2007)

Pour $n \geq 3$ l'algèbre de von Neumann $\mathscr{L}(\mathbb{F}O_n)$ est un facteur plein de type II_1. Résultat analogue en type III_λ pour $\mathbb{F}O_Q$ avec Q « proche de I_n ».

$\mathscr{L}(\mathbb{F}O_n)$ est faiblement moyennable et a la propr. d'approx. de Haagerup.

Solidité

M solide : pour toute sous-algèbre $A \subset M$ moyennable diffuse, le commutant A' est moyennable.

Théorème (Vaes–V. 2007)

Pour $n \geq 3$ le facteur $\mathscr{L}(\mathbb{F}O_n)$ est solide. En particulier il ne s'écrit pas comme produit tensoriel de deux facteurs de dimension infinie.

Outils : exactitude + propriété d'Akemann–Ostrand [V. 2005] + résultats généraux d'Ozawa.

Algèbre de von Neumann

Théorème (Vaes–V. 2007)

Pour $n \geq 3$ l'algèbre de von Neumann $\mathscr{L}(\mathbb{F}O_n)$ est un facteur plein de type II_1. Résultat analogue en type III_λ pour $\mathbb{F}O_Q$ avec Q « proche de I_n ».

$\mathscr{L}(\mathbb{F}O_n)$ est faiblement moyennable et a la propr. d'approx. de Haagerup.

Solidité **forte**

M fortement solide : pour toute sous-algèbre $A \subset M$ moyennable diffuse, le normalisateur $N_M(A)$ est moyennable.

Théorème (Isono 2015, Fima–V. 2015)

Pour $n \geq 3$ le facteur $\mathscr{L}(\mathbb{F}O_n)$ est fortement solide. En particulier il n'admet pas de sous-algèbre de Cartan.

Outils : moyennabilité faible + propriété d'Akemann–Ostrand **ou** cocycle propre faiblement contenu dans la régulière + résultats d'Ozawa–Popa.

Sous-algèbres abéliennes maximales

Terminologie

M facteur de type II_1, $A \subset M$ sous-$*$-algèbre préfaiblement fermée.

$$A' = \{u \in U(M) \mid \forall a \in A \ \ u^* a u = a\}'',$$
$$N_M(A) = \{u \in U(M) \mid \forall a \in A \ \ u^* a u \in A\}''.$$

MASA : sous-algèbre abélienne $A \subset M$ telle que $A' = A$.

MASA régulière / sous-algèbre de Cartan : $N_M(A) = M$.

MASA singulière : $N_M(A) = A$.

Théorème (Freslon-V. 2016)

Soit $\chi_1 = \sum_{i=1}^n \lambda(u_{ii})$. *Alors pour* $n \geq 3$ *la* sous-algèbre radiale $A = \chi_1''$ *est une MASA singulière dans* $\mathscr{L}(\mathbb{F}O_n)$.

Idées de preuve : suite de l'exposé. Comme pour la plupart des résultats précédents, il faut faire de l'analyse dans la catégorie de Temperley-Lieb...

Question : a-t-on $\mathscr{L}(\mathbb{F}O_n) \simeq \mathscr{L}(F_m)$? ($n \geq 3$, $m \geq 2$)

Cohomologie L^2 et entropie libre

Théorème (V. 2012)

Pour $n \geq 3$ on a $H^1(\mathbb{C}[\mathbb{F}O_n], \ell^2(\mathbb{F}O_n)) = 0$. En particulier $\beta_1^{(2)}(\mathbb{F}O_n) = 0$.

La preuve utilise les « arbres de Cayley quantiques » [V. 2005, V. 2012].
On en déduit [Brannan–Collins–V.] :

Théorème

Pour $n \geq 4$ on a $\delta_0(\{u_{ij}\}) = 1$ (dimension entropique libre des générateurs).

Rappel : $\beta_1^{(2)}(F_n) = n - 1$, $\delta_0(\{g_i\}) = n$.

Conjecture

Pour $n \geq 3$, $\mathscr{L}(\mathbb{F}O_n)$ est « fortement 1-bornée » [Jung 2007].
En particulier $\mathscr{L}(\mathbb{F}O_n) \not\simeq \mathscr{L}(F_m)$.

Plan de l'exposé