# Espace des arêtes à l'infini pour les groupes quantiques libres

Roland Vergnioux
vergniou@math.uni-muenster.de

20 janvier 2004

1. arbres de Cayley quantiques
   - ➔ groupes discrets : graphes de Cayley
   - ➔ groupes discrets : $C^*$-algèbres
   - ➔ groupes quantiques discrets
   - ➔ groupes quantiques libres
   - ➔ graphes de Cayley quantiques
   - ➔ orientation ascendante
2. espaces des arêtes à l'infini, applications

**Groupes discrets**

graphes de Cayley

## Données

- $\Gamma$ goupe discret
- $\Delta \subset \Gamma$ finie, $\Delta^{-1} = \Delta$, $e \notin \Delta$ (ensemble des directions)

## Approche simpliciale

- $\mathfrak{s} = \Gamma$, $\mathfrak{a} = \{(r, r') \in \mathfrak{s}^2 \mid \exists\, s \in \Delta \ r' = rs\}$
- retournement $\theta : \mathfrak{a} \to \mathfrak{a}, (r, r') \mapsto (r', r)$
- orientation : $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_+ \sqcup \theta(\mathfrak{a}_+)$
- arêtes géométriques : $\mathfrak{a}_g = \mathfrak{a}/\{\theta(a) \sim a\}$

## Approche directionelle

- $\mathfrak{s} = \Gamma$, $\mathfrak{a} = \Gamma \times \Delta$
- $(\mathfrak{o}, \mathfrak{b}) : \mathfrak{a} \hookrightarrow \mathfrak{s} \times \mathfrak{s},\ (r, s) \mapsto (r, rs)$
- retournement : $\theta(r, s) = (rs, s^{-1})$

**Groupes discrets**

$C^*$-algèbres de Hopf

## Algèbre des fonctions

- $C^*$-algèbre $\widehat{S} = C_0(\Gamma)$
- coproduit $\widehat{\delta} : \widehat{S} \to M(\widehat{S} \otimes \widehat{S}) = C_b(\Gamma \times \Gamma)$
  $\widehat{\delta}(f) = ((r, r') \mapsto f(rr'))$
- projecteurs $p_r \in \widehat{S}$ pour $r \in \Gamma$

## Algèbre du groupe

- $C^*$-algèbre $S = C^*(\Gamma)$, complétion de $\mathbb{C}\Gamma$
- coproduit $\delta : S \to S \otimes S, \ r \mapsto r \otimes r$

## Espace $\ell^2$

- espace de Hilbert $H = \ell^2(\Gamma)$
- représentations $S, \widehat{S} \to L(H)$
- unitaire multiplicatif $V \in L(H \otimes H)$
  $V(f)(r, r') = f(r, r^{-1} r')$
- unitaire involutif $U \in L(H)$
  $U(f)(r) = f(r^{-1})$

## Groupes quantiques discrets

[Woronowicz]

**Algèbre du groupe**

- $C^*$-algèbre $S$ unifère et $\delta : S \to S \otimes S$
- coassociativité : $(\mathrm{id} \otimes \delta) \circ \delta = (\delta \otimes \mathrm{id}) \circ \delta$
- $\delta(S)(1 \otimes S)$ et $\delta(S)(S \otimes 1)$ denses dans $S \otimes S$
- catégorie des coreprésentations $\mathcal{C}$

(cf. groupes compacts : $\oplus$, $\otimes$, Irr $\mathcal{C}$, ...)

**Algèbre des fonctions**

- $C^*$-algèbre $\hat{S} = \bigoplus_{r \in \mathrm{Irr}\, \mathcal{C}} L(H_r)$
- coproduit $\hat{\delta} : \hat{S} \to M(\hat{S} \otimes \hat{S})$
- projecteurs $p_r = \mathrm{id}_{H_r} \in \hat{S}$ pour $r \in \mathrm{Irr}\ \mathcal{C}$

**Espace $\ell^2$**

- espace de Hilbert $H$
- représentations $S, \hat{S} \to L(H)$
- unitaire multiplicatif $V \in L(H \otimes H)$
- unitaire involutif $U \in L(H)$

**Exemple « classique dual »**

$\hat{S} = C^*(G)$, $S = C_0(G)$, $G$ groupe compact

## Groupes quantiques libres

[Wang, Banica]

On fixe $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ avec $n \geq 2$.

**Cas classique**

NB : $C^*(F_n) = C^*(1, u_i \mid \forall i\ u_i$ unitaire$)$

**Version unitaire**

$A_u(Q) = C^*(1, u_{i,j} \mid u$ et $Q\bar{u}Q^{-1}$ unitaires$)$
où $u = (u_{i,j}) \in M_n(A_u(Q))$ et $\bar{u} = (u_{i,j}^*)$

➜ Irr $\mathcal{C}$ : monoïde libre en $u$ et $\bar{u}$ avec
$ru \otimes \bar{u}r' = ru\bar{u}r' \oplus r \otimes r'$, $ru \otimes ur' = ruur'$.

**Version orthogonale**

$A_o(Q) = C^*(1, u_{i,j} \mid u$ unitaire, $Q\bar{u}Q^{-1} = u)$

➜ Irr $\mathcal{C} \simeq \mathbb{N}$ avec $r_1 = u$ et, si $Q\bar{Q} \in \mathbb{C}I_n$,
$r_k \otimes r_l = r_{|k-l|} \oplus r_{|k-l|+2} \oplus \cdots \oplus r_{k+l}$.

## Graphes de Cayley quantiques

Définition

**Données**

- groupe quant. discret : $S$, $\widehat{S}$, $\mathcal{C}$, $(H, V, U)$
- $p_1$ proj. central de $\widehat{S}$ : $p_1 = \sum_{r \in \mathcal{D}} p_r$
- $U p_1 U = p_1$, $p_0 p_1 = 0 \iff \bar{\mathcal{D}} = \mathcal{D}$, $1_{\mathcal{C}} \notin \mathcal{D}$

**Graphe classique** associé à $(S, p_1)$

- $\mathfrak{s} = \mathrm{Irr}\ \mathcal{C}$, $\mathfrak{a} = \{(r, r') \in \mathcal{C} \mid \exists s \in \mathcal{D}\ r' \subset r \otimes s\}$
- $\theta$ bien défini : $r' \subset r \otimes s \iff r \subset r' \otimes \bar{s}$
- structure supplémentaire : arêtes multiples et colorées par $\mathcal{D}$

**Graphe quantique** associé à $(S, p_1)$

- espaces de Hilbert : $H$, $K = H \otimes p_1 H$
- $\Theta = \Sigma(1 \otimes U) V (U \otimes U) \Sigma$, $K_g = \mathrm{Ker}(\Theta - \mathrm{id})$
- $V : K \to H \otimes H$ « extrêmités »
- $O = (\mathrm{id} \otimes \epsilon) V$, $B = (\epsilon \otimes \mathrm{id}) V$

NB : $\Theta^2 \neq \mathrm{id}$

## Orientation ascendante
(cas des arbres)

**Hypothèse**

Le graphe classique est un arbre « strict »

➔ origine $1_{\mathcal{C}}$, orientation montante :

$$\mathfrak{a}_+ = \{(r, r') \in \mathfrak{a} \mid \mathrm{d}(r', 1_{\mathcal{C}}) > \mathrm{d}(r, 1_{\mathcal{C}})\}$$

**Proposition** *Le groupe quantique discret associé à $S$ est un produit libre fini de groupes $A_o(Q_i)$ et $A_u(Q'_j)$ avec $Q_i\bar{Q}_i \in \mathbb{C}\mathrm{id}$.*

**Définition**

➔ $p_n = \sum \{p_r \mid d(r, 1_{\mathcal{C}}) = n\}$

➔ $p_{\star+} = \sum_{(r,r')\in\mathfrak{a}_+} V^*(p_r \otimes p_{r'})V$

➔ $p_{\star-} = 1 - p_{\star+}$

➔ $\Theta^* p_{\star-}\Theta \neq p_{\star+}$ *! !* ➔ $p_{+\star} = \Theta^* p_{\star-}\Theta$

➔ $p_{++} = p_{\star+}p_{+\star}$, $p_{+-} = p_{\star-}p_{+\star}$, . . .

➔ $K_{++} = p_{++}K$ *espace des arêtes montantes*